

# Лекция 1

## I. Основные свойства стабильных ядер

Теперь мы приступаем к изучению нового раздела нашего курса — ядерной физики, которая изучает свойства и взаимопревращения атомных ядер. Ядра состоят из протонов и нейтронов. Протон является легчайшим ядром и имеет заряд  $Z = +q_0$ . Нейтрон является электрически нейтральной частицей и имеет массу близкую к массе протона.

Ядра бывают *стабильные* и *нестабильные* (или *радиоактивные*). Основными свойствами стабильных ядер являются их заряд, масса, радиус, полный момент импульса, магнитный момент, квадрупольный электрический момент, четность. В свою очередь нестабильные ядра имеют ряд дополнительных характеристик: тип распада, период полураспада и др.

Сейчас мы познакомимся более подробно с основными характеристиками стабильных ядер.

### A. Электрический заряд ядра

Как мы уже знаем из первой части курса, заряд ядра  $Zq_0$  по абсолютному значению равен суммарному заряду всех электронов соответствующего элемента и противоположен ему по знаку. Иными словами  $Z$  представляет собой ни что иное, как порядковый номер элемента в таблице Менделеева (атомный номер). Очевидно, что атомный номер является числом протонов входящих в данное ядро.

Экспериментально измерение величины электрического заряда ядер было выполнено на основе закона Мозли (9.9). Несколько позднее (в 1920 г.) Дж. Чедвику удалось измерить заряды ядер в опытах по рассеянию  $\alpha$ -частиц на металлических фольгах.

### B. Масса ядра

#### 1. Принцип действия масс-спектрографа

Для определения масс ядер используются масс-спектрографы. Современная техника масс-спектрокопии позволяет измерять массы ядер с величиной относительной погрешности до  $10^{-6}$  и более.

Принцип действия масс-спектрографа базируется на свойстве магнитного поля фокусировать движущиеся в нем заряженные частицы с данной массой  $M$  (Дж.Дж. Томсон, 1907 г.). В источнике **И** образуются частицы с массой  $M$  и зарядом  $Zq_0$  (Рис. 10.1).

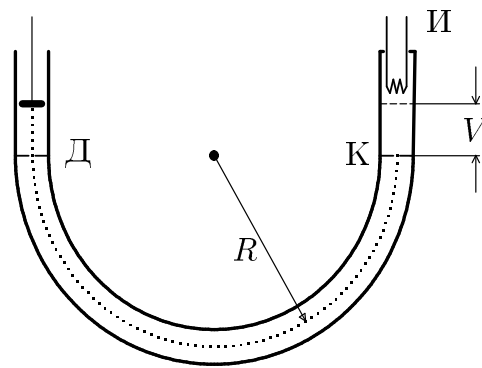


Рис. 1: Схема масс-спектрографа.

С помощью разности потенциалов  $V$  они ускоряются до скорости  $v$  и затем через тонкий калиматор **К** попадают в трубку, которая находится под действием внешнего магнитного поля напряженности  $\vec{B}$ . Скорость частицы легко определяется из значения ее кинетической энергии:

$$Zq_0V = \frac{Mv^2}{2}. \quad (1)$$

Направление магнитного поля выбрано перпендикулярным к плоскости масс-спектрографа. Как известно на такую частицу будет действовать сила Лоренца, в результате чего частица начнет двигаться по окружности. Причем радиус окружности  $R$  и масса частицы связаны соотношением

$$Zq_0Bv = \frac{Mv^2}{R}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем

$$M = \frac{Zq_0B^2R^2}{2V}. \quad (3)$$

Если заставить частицу пролететь через тонкую диафрагму **Д** на другой концы трубки, то радиус  $R$  будет равняться половине расстояния **КД**. Этого можно добиться путем варьирования напряжения  $V$  и величины поля  $B$ . В результате все величины входящие в правую часть формулы (2) будут известны и массу частицы можно легко рассчитать.

Массы ядер часто выражают в *атомных единицах массы* (а.е.м.). Последняя определяется как  $1/12$  массы атома углерода-12. Она равна  $1,66053886(28) \times 10^{-27}$  кг или  $931,494043(80)$  МэВ/ $c^2$ .

#### 2. Изотопы и изобары

На основании измерения масс ядер удалось обнаружить ядра имеющие одинаковый атомный номер  $Z$  и разное *массовое число*  $A$ . Последнее является суммарным числом протонов  $Z$  и нейтронов  $N$

$$A = Z + N. \quad (4)$$

Таблица I: Нижайшие изотопы и их массы.

изотоп	название	масса (а.е.м.)	
${}^1_1\text{H}$	протон	1,0081	
${}^2_1\text{H}$	дейтрон	2,0147	
${}^3_1\text{H}$	тритий	3,0170	изобара ${}^3_2\text{He}$
${}^3_2\text{He}$		3,0170	изобара ${}^3_1\text{H}$
${}^4_2\text{He}$	$\alpha$ -частица	4,0039	
${}^7_3\text{Li}$		7,0182	изобара ${}^7_4\text{Be}$
${}^7_4\text{Be}$		7,0191	изобара ${}^7_3\text{Li}$
${}^9_4\text{Be}$		9,0162	
${}^{11}_4\text{Be}$		11,0128	

Такие элементы называются *изотопами*. Существование изотопов, в частности, объясняет причину существования атомов с дробным атомным весом. Термин изотоп был предложен Ф. Содди в 1910 г. Первые стабильные изотопы были обнаружены Дж. Томсоном в 1913 г. и Ф. Астоном в 1919 г. Всего к настоящему времени известно более 2000 стабильных и радиоактивных изотопов.

Обычно употребляют следующие обозначения для ядер: ставится символ атома, слева вверху пишется его массовое число  $A$ , а слева внизу — его атомный номер  $Z$ :

$$\frac{A}{Z}(\text{Символ элемента}). \quad (5)$$

Ряд нижайших изотопов приведен в Таблице 10.I. Изотопы водорода имеют особое название:  ${}^2_1\text{H}$  называют дейтроном, а  ${}^3_1\text{H}$  — тритоном. Изотоп гелия  ${}^4_2\text{He}$  называют  $\alpha$ -частицей.

Ядра, у которых атомные веса  $A$  совпадают, а атомные номера  $Z$  различны, называются *изобарами*. Простейшим примером изобар могут служить протон и нейтрон. Оказывается, что многие свойства изобар очень схожи. Например они имеют очень близкие массы, одинаковые спины, четности. Различие масс у изобар имеет в основном электромагнитное происхождение. Поэтому изобары образуют группы ядер, свойства которых одинаковы относительно сильных взаимодействий. Такие группы называют *изотопическими мультиплетами*. Так протон и нейтрон образуют изотопический дублет. Их можно рассматривать как два различных состояния одной частицы, которую принято называть *нуклоном*. Ряд других простейших изобар приведен в Таблице 10.I.

В зависимости от соотношения между протонами и нейтронами принято делить ядра на четыре класса

- *четно–четные ядра* — четное число протонов и четное число нейтронов
- *нечетно–четные ядра* — нечетное число протонов и четное число нейтронов
- *четно–нечетные ядра* — четное число протонов и нечетное число нейтронов

- *нечетно–нечетные ядра* — нечетное число протонов и нечетное число нейтронов

Оказывается, что в зависимости от того, к какому из классов принадлежит то или иное ядро, в сильной мере зависят его свойства. Так, например, у четно–четных ядер оказывается наибольшая энергия связи.

### 3. Масса нейтрона



Рис. 2: Дж. Чедвик. Открыл нейтрон.

Нейтрон был открыт в 1932 г. английским физиком Дж. Чедвиком. Он же впервые измерил массу нейтрона.

Нейтрон является электрически нейтральной частицей. Поэтому очевидно, что его масса не может быть измерена масс-спектрографом и приходится применять другие методы. Это было сделано на основании законов сохранения энергии и импульса изучая реакции рождения нейтрона. С этой целью наблюдалась реакция фоторасщепления дейтрона



с измерением энергии протона. (Здесь и далее  $p$  и  $n$  будут обозначать протон и нейтрон.) Значение кинетической энергии протона, которая измерялась с помощью камеры Вильсона, оказалось равным  $T_p = 0,2$  МэВ. Энергия фотонов также была известна  $E_\gamma = 2,62$  МэВ.

Зная кинетическую энергию протона легко найти его импульс

$$p_p = \sqrt{2m_p T_p} \approx 20 \frac{\text{МэВ}}{c}, \quad (7)$$

где  $m_p = 938,2796 \pm 0,0027$  МэВ/ $c^2$  — масса протона. Соответственно импульс фотонов равнялся

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = 2,62 \frac{\text{МэВ}}{c}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим, что

$$p_p \gg p_\gamma. \quad (9)$$

Отсюда на основании закона сохранения импульса заключаем, что импульс нейтрона приблизительно равен импульсу нейтрона

$$p_n \approx p_p \quad (10)$$

и направлен в другую сторону.

Теперь запишем закон сохранения энергии

$$E_\gamma + E_d = E_p + E_n. \quad (11)$$

Учтем в (11) тот факт, что дейтрон покоится. Тогда получаем для его энергии  $E_d = Mc^2$  ( $M$  — масса дейтрона). Энергии протона и нейтрона выражаются через их кинетические энергии согласно  $E_p = m_p c^2 + T_p$ ,  $E_n = m_n c^2 + T_n$  (здесь  $m_p$  и  $m_n$  — массы протона и нейтрона). В силу (10) следует положить  $T_n = T_p$ . В результате масса нейтрона определяется из следующего квадратного уравнения

$$m_n^2 + m_n \left[ -M + m_p - \frac{E_\gamma - T_p}{c^2} \right] + \frac{1}{2c^2} p_n^2 = 0. \quad (12)$$

Решая это уравнение и отбрасывая члены порядка  $\mathcal{O}(\frac{1}{c^4})$  получим

$$m_n = M - m_p + \frac{1}{c^2} (E_\gamma - 2T_p). \quad (13)$$

Подставляя в правую часть уравнения соответствующие числа оценим массу нейтрона

$$m_n = 938,6 \text{ МэВ}/c^2 > m_p. \quad (14)$$

Современные данные для разности масс нейтрона и протона составляют величину

$$m_n - m_p = (1,293326 \pm 0,000016) \text{ МэВ}/c^2. \quad (15)$$

Тот факт, что масса нейтрона больше массы протона, приводит к одному важному следствию: в свободном состоянии нейтрон, в отличие от протона, является нестабильной частицей и распадается на протон, электрон (далее будем обозначать  $e^-$ ) и электронное антинейтрино ( $\bar{\nu}_e$ )

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (16)$$

Время жизни нейтрона равняется  $\tau = 898 \pm 16$  сек.

### С. Размеры ядер

Исторически первая оценка размера ядра была сделана Э. Резерфордом на основе его опыта. Он получил величину порядка или менее  $10^{-12}$  см = 10 фм.

В настоящее время существует много различных методов измерения размера ядра. Все они дают одинаковую формулу зависимости радиуса ядра  $R$  от массового числа  $A$

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad (17)$$

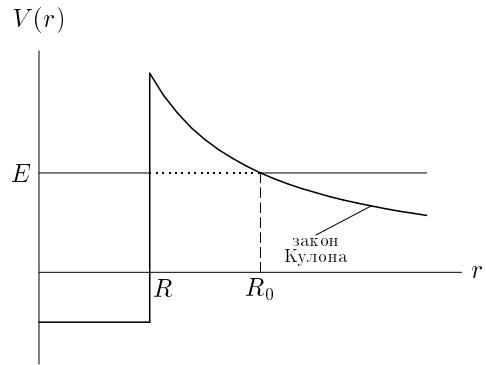


Рис. 3: Потенциал для  $\alpha$ -частицы в ядре.

однако величина  $r_0$ , измеряемая различными методами, оказывается несколько различной. Это легко понять, если вспомним, что ядро представляет систему частиц, находящиеся в движении и подчиняющиеся законам квантовой механики. Поэтому можно говорить о ядре как системе с “размытым” краем для которой, строго говоря, понятие о ее размере неопределенно. Тем не менее разные методы дают оценки одного порядка, что говорит о том, что величина размытия невелика по сравнению со средним размером ядра. Фактически при каждом методе измерения используется свое собственное понятие размера ядра. Разберем это подробнее.

#### 1. Определение радиуса ядра на основе его $\alpha$ -распада

Этот метод очевидно справедлив только для  $\alpha$ -радиоактивных ядер. Согласно теории, выдвинутой Г. Гамовым в 1928 г.,  $\alpha$ -распад происходит вследствие туннельного эффекта. Предполагается, что  $\alpha$ -частица уже заранее приготовлена внутри ядра<sup>1</sup>. При этом считается, что потенциал удерживающий ее внутри ядра имеет вид прямоугольной потенциальной ямы радиуса  $R$ . В свою очередь, вне ядра (т.е. на расстояниях от центра ядра  $r > R$ ) ядерные силы пропадают и потенциал взаимодействия между ядром и  $\alpha$ -частицей определяются потенциалом кулоновского отталкивания. Тогда полный потенциал для  $\alpha$ -частицы будет такой, как на Рис. 10.2.

Допустим, что  $\alpha$ -частица находится на энергетическом уровне  $E$ . Тогда вероятность туннелирования  $\alpha$ -частицы через барьер будет определяться как (3.69)

$$P = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_0} dr \sqrt{2M[V(r) - E]} \right\}, \quad (18)$$

<sup>1</sup> Это можно обосновать на основании того, что энергия связи у  $\alpha$ -частицы намного больше, чем у других ядер. Более подробно мы это обсудим ниже.

Таблица II: Значения коэффициента  $r_0$  от  $E_n$  при измерении радиуса ядра методом рассеяния нейтронов на ядрах.

$E_n$ (МэВ)	$r_0$ (фм.)
14 — 25	1,4
90	1,37
1400	1,28

где  $M$  — масса  $\alpha$ -частицы, а  $R_0$  — расстояние, начиная с которого энергия  $\alpha$ -частицы будет больше энергии кулоновского отталкивания (см. Рис. 10.2)

$$R_0 = \frac{2(Z-2)q_0^2}{E}. \quad (19)$$

Для того, чтобы найти вероятность  $\alpha$ -распада ядра  $W$ , необходимо вероятность туннелирования отдельной  $\alpha$ -частицы умножить на числа ударов последней о границу ядра в единицу времени, т.е. частоту осцилляций  $\alpha$ -частицы в прямоугольной яме радиуса  $R$ . Если скорость  $\alpha$ -частицы внутри ядра  $v$ , то частота равна  $\omega = \frac{v}{2R}$ , где  $v = \sqrt{2EM}$ . В результате получаем для вероятности  $\alpha$ -распада

$$W = \frac{v}{2R} P. \quad (20)$$

Следовательно, вероятность  $\alpha$ -распада оказывается функцией двух переменных  $W(E, R)$ . Измеряя на опыте  $E$  и  $W$  и сравнивая результат расчета по формуле (20) для разных  $R$  можно найти такой радиус ядра, при котором результат расчета совпадет с экспериментом. В этом случае значение коэффициента  $r_0$  в формуле (17) получается равным

$$r_0 = 1,45 \div 1,50 \text{ фм.}, \quad (21)$$

а радиусы радиоактивных ядер оказываются равными  $R \approx 7 \div 9$  фм.

Очевидно, что оцененная величина ядра имеет смысл эффективного радиуса, на котором в ядре действует эффективный потенциал ядерного взаимодействия аппроксимированный потенциалом прямоугольной ямы.

## 2. Рассеяние нейтронов на ядрах

Пусть на тонкую мишень падает поток нейтронов  $N$ . Под тонкой мишенью понимается такая мишень, для которой ядра не перекрываются для потока нейтронов и взаимно не затеняют друг друга. В результате взаимодействия с мишенью ряд нейтронов не пройдет через мишень (Рис. 10.3). Обозначим число нейтронов, которые пройдут через единицу площади мишени, как  $\Delta N$ . Величина отношения

$$\sigma = \frac{\Delta N}{N n \delta}, \quad (22)$$

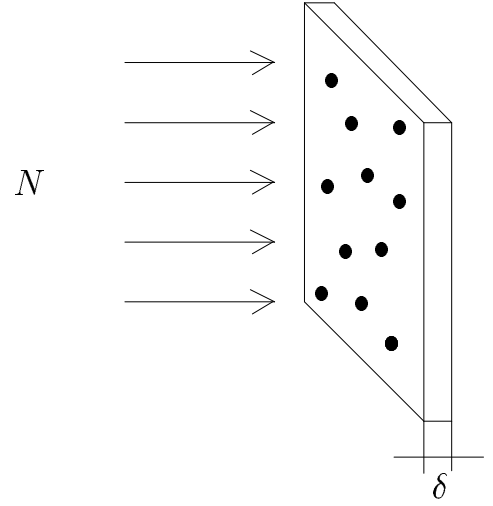


Рис. 4: Рассеяние нейтронов на ядрах мишени.

где  $n$  — концентрация ядер мишени, а  $\delta$  — ее толщина, называют полным сечением рассеяния нейтронов на ядре. Сечение, как следует из его определения, имеет размерность площади. Его можно рассматривать как эффективное геометрическое сечение ядра. Тогда можно написать

$$\sigma = \pi R^2. \quad (23)$$

Фактически это выражение и есть определение эффективного радиуса ядра, измеряемого этим методом.

Измеряя экспериментально полное сечение  $\sigma$  можно, таким образом, оценить размер ядра. Следует, однако, сказать, что сечение зависит от энергии  $E_n$  падающих нейтронов, хотя эта зависимость, как правило, и не очень сильная. Поэтому значение радиуса ядра оцененное таким методом будет зависеть от  $E_n$ . Таблица II дает представление о такой зависимости.

В результате получаем среднее значение ядра измеренное методом рассеяния нейтронов  $r_0 = 1,3 \div 1,4$  фм.

Этот метод применим ко всем ядрам.

## 3. Рассеяние электронов на ядрах

Длина волны де Бройля для электрона определяется согласно

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (24)$$

где  $p$  — импульс электрона. Поэтому при достаточно больших энергиях электронов  $\lambda$  становится меньше размера ядра и, следовательно, результат рассеяния таких электронов (в частности их угловые распределения) будут чувствительны к особенностям распределения заряда в ядре.

Так оказывается, что дифференциальное сечение рассеяния таких электронов выражается через фурье-образ распределения электрического заряда в ядре  $\rho(r)$  (*электрический формфактор ядра*)

$$G_E(Q^2) = \int d^3x \exp\left[i \frac{\vec{k}\vec{x}}{\hbar}\right] \rho(r), \text{ где } Q = |\vec{k}|/\hbar. \quad (25)$$

В (25) величина  $Q^2$  имеет простой физический смысл: она представляет квадрат 4-импульса с обратным знаком, который передается электроном ядру в процессе рассеяния

$$Q^2 = -(p_{\text{пад.}} - p_{\text{расс.}})^2, \quad (26)$$

где 4-импульсы падающего и рассеянного электронов суть

$$p_{\text{пад.}} = \left(\frac{1}{c}E_{\text{пад.}}, \vec{p}_{\text{пад.}}\right), \quad p_{\text{расс.}} = \left(\frac{1}{c}E_{\text{расс.}}, \vec{p}_{\text{расс.}}\right). \quad (27)$$

Таким образом измеряя сечение рассеяния электронов на ядрах при различных значениях  $Q^2$  можно найти их электрические формфакторы и, значит, получить информацию о распределении электрического заряда в ядре.

Согласно (25) при значении  $Q^2 = 0$  формфактор сводится к электрическому заряду ядра  $Zq_0$ . Разложим формфактор в ряд по  $Q^2$ . В результате несложных вычислений получим

$$G_E(Q^2) = Zq_0 \left(1 - \frac{Q^2}{6} \langle r^2 \rangle\right), \quad (28)$$

где

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Zq_0} \int d^3x r^2 \rho(r) = \frac{4\pi}{Zq_0} \int_0^\infty dr r^4 \rho(r) \quad (29)$$

представляет значение квадрата радиуса усредненно по распределению электрического заряда ядра. Соответственно величина

$$R = \langle r^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

называется *среднеквадратичным электрическим радиусом ядра*. Экспериментальное изучение рассеяния электронов на ядрах было проведено в 50-е годы группой американских физиков под руководством Р. Хофштадтера, что позволило достаточно полно исследовать распределение протонов в ядре. Оказалось, что оно хорошо описывается следующим выражением

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left[\frac{r - R_0}{a}\right]}, \quad R_0 \gg a, \quad (31)$$

где параметр  $R_0$  имеет смысл расстояния на котором плотность заряда убывает в ядре вдвое, а  $a$  характеризует насколько быстро происходит убывание плотности заряда у границы ядра (Рис. 10.4).

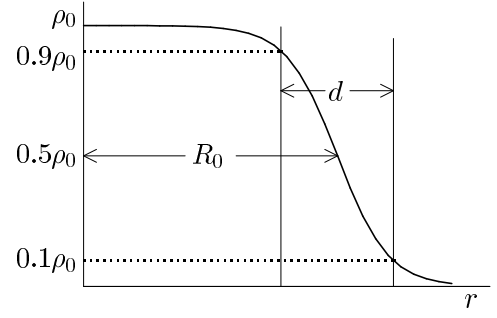


Рис. 5: Распределение электрического заряда в ядре. Опыт показывает, что ядер с  $40 \leq A \leq 208$  ширина слоя  $d = 4,4a \approx 2,4$  фм., а  $R_0 = 1,08$  фм.  $\times A^{1/3}$ .

Помимо среднеквадратичного радиуса ядра можно ввести понятие *эквивалентного радиуса*. Эквивалентный радиус,  $R_{\text{эк.}}$ , это радиус такого однородно заполненного шара, у которого тот же среднеквадратичный радиус, что и при неоднородном распределении

$$\langle r^2 \rangle = \frac{3 \int_0^{R_{\text{эк.}}} r^4 dr}{R_{\text{эк.}}^3} = \frac{3}{5} R_{\text{эк.}}^2. \quad (32)$$

Оказывается, что эквивалентные радиусы ядер хорошо аппроксимируются следующей зависимостью

$$R_{\text{эк.}} = 1,07 \times A^{\frac{1}{3}} + 0,7 \text{ фм.} \quad (33)$$

Можно считать, что плотность нейтронов в ядре не сильно отличается от плотности протонов. В этом случае полученные оценки для среднеквадратичного радиуса мало отличаются от размера ядра.



Рис. 6: Р. Хофштадтер. Открыл, что протон имеет размер.

Оказалось, что это же метод может быть использован для исследования структуры протона и нейтрона. Так для протона среднеквадратичный электрический радиус оказался равен

$$\langle r_{\text{прот.}}^2 \rangle \approx 0,6 \text{ фм}^2. \quad (34)$$

Тем самым было показано, что протон имеет внутреннюю структуру. Что касается нейтрона, то у него нет электрического заряда. Тем не менее его электриче-

ский формфактор не равен нулю<sup>2</sup>. Это означает, что в нейтроне имеется распределение положительного и отрицательного зарядов. Более подробно это мы обсудим в лекциях по кварковой модели элементарных частиц. Интересно, что для нейтрона среднеквадратичный радиус оказывается ненулевым и отрицательным (хотя по абсолютному значению он намного меньше, чем  $\langle r_{\text{прот.}}^2 \rangle$ ).

За открытие внутренней структуры протона в 1961 г. Р. Хофштадтеру была присуждена Нобелевская премия по физике.

#### Д. Четность

В части нашего курса посвященного атомной физике (Лекция 4) мы уже встречались с понятием четности квантового состояния. Обозначим оператор четности  $\hat{P}$ . Из общих принципов квантовой механики следует, что квантовое состояние с определенной энергией  $E_n$  будет обладать определенной четностью, если гамильтониан системы описывающий данное квантовое состояние  $\hat{H}$  коммутирует с оператором четности

$$[\hat{H}, \hat{P}] = 0. \quad (35)$$

В свою очередь, как уже отмечалось ранее, опыт показывает, что четность сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях, но не сохраняется в слабых (см. по этому поводу также подраздел “Электрические моменты ядер”). Далее, опыт также говорит, что структура ядер определяется сильными и, в незначительной мере, электромагнитными взаимодействиями. Следовательно для ядер выполняется условие (35) и ядра обладают определенной четностью  $P$ .

#### Е. Механический и магнитный моменты ядер

Ядро, также как и атом, обладает механическим и магнитным моментами. Поэтому соответствующие полные моменты атома состоят из суммы моментов для электронов и для ядра.

Механические моменты атома подразделяются на орбитальный момент электронов  $\vec{L}$ , спин электронов  $\vec{S}$ , полный механический момент электронов  $\vec{J}$ , момент количества движения ядра (спин ядра)  $\vec{I}$  и полный момент количества движения атома  $\vec{F}$ . Ввиду того, что у внутренних моментов электронов суммарный момент равен нулю, то в  $\vec{L}$  и  $\vec{S}$  дают вклад только внешние электроны с незаполненных оболочек.

Магнитные моменты соответствующие каждому из моментов количества движения  $\vec{L}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{I}$  и  $\vec{F}$  будем снабжать соответствующим индексом. Так  $\vec{\mu}_F$  будет обозначать полный магнитный момент атома,  $\vec{\mu}_I$  — магнитный момент ядра и т.д.

##### 1. Методы определения спинов ядер

Для определения спинов и магнитных моментов ядер существуют различные методы. Далее мы рассмотрим только некоторые из них.

**Определение спина ядра по сверхтонкому расщеплению в атоме.** Этот метод основан на изучении влияния ядра на сверхтонкое расщепление в атоме. Энергия взаимодействия магнитного момента ядра  $\vec{\mu}_I$  с магнитным полем  $\vec{B}$ , которое создает электронное поле атома равна

$$E_{\text{вз.}} = -\vec{\mu}_I \vec{B}. \quad (36)$$

При этом, как и для спинового момента электрона, имеет место следующее соотношение между магнитным моментом ядра и его спином

$$\vec{\mu}_I = \mu \frac{\vec{I}}{|\vec{I}|}. \quad (37)$$

Магнитное поле создаваемое электронами пропорционально полному моменту количества движения электронов  $\vec{J}$

$$\vec{B} = -V_0 \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|}, \quad (38)$$

где  $V_0$  зависит от характера самосогласованного поля атома. В результате получаем

$$E_{\text{вз.}} = \mu V_0 \frac{\vec{J} \vec{I}}{|\vec{J}| |\vec{I}|}. \quad (39)$$

Расписывая в (39) скалярное произведение через квадраты векторов  $\vec{F}^2$ ,  $\vec{I}^2$  и  $\vec{J}^2$  и заменяя последние на их собственные значения получим

$$E_{\text{вз.}} = \frac{\mu V_0}{2} \frac{F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)}{\sqrt{J(J+1)I(I+1)}}, \quad (40)$$

где  $F$  принимает одно из целых или полуцелых (в зависимости от того, целое или полуцелое число  $J+I$ ) значений лежащих в пределах

$$|J - I| \leq F \leq J + I. \quad (41)$$

Считается, что  $J$  известно. Тогда если  $J > I$ , то величину  $I$  можно определить путем подсчета числа линий сверхтонкого расщепления, т.к. число линий равняется величине  $2I + 1$ .

<sup>2</sup> Электрический формфактор нейтрона равен нулю только при  $Q^2 = 0$ , что выражает факт отсутствия у нейтрона электрического заряда.

В том случае, если  $J < I$ , то число линий равно величине  $2J + 1$  и этот метод не годится. Поэтому прибегают к *методу интервалов*. Он основан на том, что разность энергий двух соседних состояний равна

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{вз.}} &= \frac{\mu V_0}{2} \frac{F(F+1) - (F-1)F}{\sqrt{J(J+1)I(I+1)}} = \\ &= \frac{\mu V_0 F}{\sqrt{J(J+1)I(I+1)}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Значит величины интервалов энергий будут относиться как

$$(J+I) : (J+I-1) : (J+I-2) : \dots : |I-J|. \quad (43)$$

Измеряя расстояния между соответствующими линиями можно на основании отношений (43) определить  $I$ .

Имеются случаи, когда оба эти метода оказываются неприменимы. В этом случае прибегают к другим методам, изложение которых мы здесь опускаем<sup>3</sup>.

**Исследование переходов во внешнем магнитном поле.** Этот способ основан на изучении числа состояний атома во внешнем магнитном поле. Если поле слабое и не может разорвать связь моментов  $\vec{J}$  и  $\vec{I}$ , то наблюдается эффект Зеемана. При данном значении  $F$  полный момент  $\vec{F}$  может иметь  $2F+1$  ориентации. Поэтому уровень с фиксированным  $F$  расщепится на  $2F+1$  подуровней. Для того, чтобы найти полное число расщепленных подуровней необходимо просуммировать эту величину по всем возможным значениям  $F$  при данных  $J$  и  $I$

$$\text{Число подуровней} = \sum_{|J-I|}^{J+I} (2F+1) = (2J+1)(2I+1). \quad (44)$$

Таким образом зная число подуровней и величину  $J$  легко определить  $I$ .

Если поле настолько сильно, что может разорвать связь моментов  $\vec{J}$ , то наблюдается эффект Пашена-Бака, т.е. каждый из этих моментов дает независимое расщепление. В связи с тем, что магнитный момент  $\mu_J \gg \mu_I$  (первый пропорционален электронному магнетону, а второй — ядерному), то на широкие уровни расщепления по ориентации момента  $\vec{J}$  будет накладываться  $2I+1$  малых подрасщеплений по ориентации спина ядра. Подсчитывая число таких подрасщеплений легко определить спин ядра.

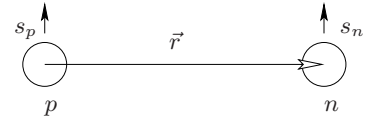


Рис. 7: Дейтрон представляет связанное состояние протона и нейтрона с параллельными спинами.

## 2. Определение магнитных моментов ядер.

К настоящему времени развиты чрезвычайно точные способы определения магнитных моментов ядер, основанные на методе ЯМР. Впервые ЯМР на изолированных ядрах наблюдался американским физиком И. Раби в молекулярных и атомных пучках (1937 г.).

Суть явления ЯМР очень схожа с явлением ЭПР, о котором мы уже говорили выше (Лекция 7). Пусть на образец действуют два взаимно перпендикулярных магнитных поля. Одно из них сильное,  $\vec{B}_0$ , и постоянное, а второе,  $\vec{B}$ , слабое и переменное с частотой  $10^6$ – $10^7$  Гц.

В результате взаимодействия магнитного момента ядра  $\vec{\mu}_I$  с полем  $\vec{B}_0$  происходит зеемановское расщепление уровня на  $(2I+1)$  подуровня

$$E_{m_I} = -\mu_I B_0 m_I, \quad m_I = -I, -I+1, \dots, I, \quad (45)$$

где  $m_I$  — магнитное квантовое число, связанное со спином ядра. В том случае, когда частота  $\omega$  поля  $\vec{B}$  удовлетворяет условию

$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{E_{m_I} - E_{m_I+1}}{\hbar} = \frac{\mu_I B_0}{\hbar}, \quad (46)$$

происходит переход между соседними линиями расщепленных уровней и наблюдается резонанс. Зная частоту резонанса  $\omega$  и напряженность поля  $B_0$  легко найти значение магнитного момента ядра  $\mu_I$ .

## 3. Спины и магнитные моменты легчайших ядер.

Начнем с простейшей ядерной системы — дейтрона. Он состоит из двух нуклонов, протона и нейтрона.

Спин и четность дейтрона  $I^P = 1^+$ . Тогда можно считать, что дейтрон представляет собой систему, в которой спины протона и нейтрона параллельны. Относительное движение нуклонов в дейтроне можно описать, как движение частицы во внешнем потенциале  $V(\vec{r})$ , где  $\vec{r}$  — относительная координата между протоном и нейтроном (Рис. 10.5). При этом наиболее естественно допустить, что потенциал  $V(\vec{r})$  сферически-симметричен и относительное движение нуклонов происходит в  $S$ -волне, т.е. в спектроскопических обозначениях (см. Лекцию 7) он соответствует  $^3S_1$ -конфигурации.

В таком случае магнитный момент дейтрона должен просто представлять собой сумму магнитных моментов протона и нейтрона. Складывая магнитные

<sup>3</sup> Более подробно см., например, книгу: Л.Н. Мухин, Экспериментальная ядерная физика. М.: Атомиздат, 1974 г., т.1. Наше изложение определения спина и магного момента ядра мы в значительной мере основывается на этой книге.

моменты протона и нейтрона получаем

$$\mu_p + \mu_n \approx 0,8798 \text{ яд. маг.} \quad (47)$$

В свою очередь экспериментальное значение магнитного момента дейтрона равно

$$\mu_d = 0,857406 \pm 0,000001 \text{ яд. маг.} \quad (48)$$

Небольшое расхождение между этим значением и величиной (47) имеет принципиальный характер и говорит о том, что в дейтроне помимо  $^3S_1$ -конфигурации имеется добавка от конфигураций с другими орбитальными моментами. Из условия, что дейтрон имеет положительную четность, следует, что конфигурации с нечетными орбитальными моментами относительно движения нуклонов в дейтроне  $L$  не могут входить в дейтрон<sup>4</sup>. Кроме того, для того, чтобы обеспечить условие  $I = 1$ , следует положить  $L \leq 2$ . Таким образом имеется единственная возможная добавка  $^3D_1$ . В этом случае магнитный момент дейтрона будет равен (см. Задачу 10.1)

$$\mu_d = \mu_p + \mu_n - \frac{3}{2} \left( \mu_p + \mu_n - \frac{1}{2} \right) P_D, \quad (49)$$

где  $P_D$  — вероятность обнаружить  $^3D_1$  конфигурацию в дейтроне. По современным оценкам величина  $P_D$  составляет 5–6%, что приводит к значительному уменьшению расхождения между экспериментом и теорией. Однако следует сказать, что помимо  $D$ -волны в магнитный момент должны давать вклад другие эффекты (релятивистские эффекты, рождение виртуальных мезонов и др.), величина которых имеет порядок близкий к рассмотренной выше поправке.

Начиная с трехнуклонных систем (ядра  $^3\text{He}$  и  $^3\text{H}$ ) начинает проявляться важная закономерность — компенсация спинов. У каждого этих ядер спин равен  $I = \frac{1}{2}$ . Это означает, что спины двух их нуклонов антипараллельны и полный спин ядра определяется спином оставшегося нуклона. Кроме того, магнитный момент  $^3\text{He}$  равен приблизительно -2,1 яд. м., что близко к значению магнитного момента нейтрона. Таким образом можно заключить, что магнитные моменты протонов в этом ядре скомпенсированы и, следовательно, ядро имеет следующую спиновую структуру

$$|^3\text{He}\rangle = |p^\uparrow p^\downarrow n^\uparrow\rangle. \quad (50)$$

Очевидно, что существование такой спиновой структуры легко объяснить на основании принципа Паули — два протона не могут находиться в одном квантовом

состоянии и поэтому их спины обязаны быть направлены в разные стороны.

Аналогично для ядра *трития* ( $^3\text{H}$ ) два нейтрона обязаны иметь спины направленные в разные стороны и поэтому имеют такую спиновую структуру

$$|^3\text{H}\rangle = |n^\uparrow n^\downarrow p^\uparrow\rangle. \quad (51)$$

В результате магнитные моменты нейтронов компенсируются и магнитный момент трития оказывается близким к магнитному моменту протона ( $\approx 3$  яд. м.).

В случае  $\alpha$ -частицы (ядро  $^4\text{He}$ ) имеет место полная компенсация спинов и магнитных моментов нуклонов. При этом спиновая структура этого ядра следующая

$$|^4\text{He}\rangle = |p^\uparrow p^\downarrow n^\uparrow n^\downarrow\rangle. \quad (52)$$

$\alpha$ -частица является четно-четным ядром. Аналогичным образом можно заключить, что у всех других четно-четных ядер должны быть скомпенсированы спины нуклонов и магнитные моменты. Это полностью подтверждается экспериментом.

К проблеме магнитных моментов более сложных ядер мы вернемся несколько ниже.

## Г. Электрические моменты ядер

*Электрические моменты ядер* дают информацию о распределении электрических зарядов в ядре. Они также определяют и взаимодействие ядра с не очень сильным внешним электрическим полем. Под “не очень сильным полем” мы здесь понимаем такое поле, которое производит пренебрежимо малое перераспределение зарядов в ядре.

Из классической электродинамики известно, что система электрических зарядов с определенной симметрией характеризуется мультипольным моментом. В зависимости от сложности симметрии мультипольные моменты имеют тот или иной момент. Электрический мультипольный момент определяется как

$$Q_{lm} = \int d^3r r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) \rho(\vec{r}), \quad (53)$$

где  $\rho(\vec{r})$  — распределение электрических зарядов в ядре. Число  $l$  называют *порядком мультипольного момента*. Рассмотрим более подробно мультипольные моменты нелевого, первого и второго порядков.

### 1. Мультипольные моменты ядер нулевого и первого порядков

Мультипольный момент нулевого порядка следующим образом выражается через заряд ядра

$$Zq_0 = \int d^3r \rho(\vec{r}) = \sqrt{4\pi} Q_{00}, \quad (54)$$

<sup>4</sup> Этот момент количества движения мы обозначили той же буквой, которой обозначали орбитальный момент электронов в атоме. Различие очевидно из контекста.



т.е. с точностью до множителя равен заряду ядра.

Следующим по сложности является дипольный момент. В случае, когда имеются только заряды одного знака, дипольный момент характеризует распределение заряда относительно центра масс системы и равен

$$\vec{D} = \int d^3r \vec{r} \rho(\vec{r}), \quad (55)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор точки относительно центра масс ядра. В частности, для  $z$ -проекция дипольного момента имеем

$$D_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Q_{10}. \quad (56)$$

Для ядра дипольный момент характеризует возможное несовпадение центров масс протонной и нейтронной “жидкостей” ядра.

Вследствии симметричности волновой функции ядра относительно инверсии пространства из (55) получаем, что дипольный момент ядра равен нулю.

Покажем это. Вероятность найти протон  $i$  в окрестности  $d^3r_i$  около точки  $\vec{r}$  равна

$$P_i(\vec{r}_i) = \prod_{j \neq i} \int d^3r_j |\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)|^2. \quad (57)$$

Тогда распределение заряда в ядре выражается формулой

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^Z q_0 P_i(\vec{r}_i), \quad (58)$$

где  $q_0$  — заряд протона. Если четность сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях то

$$\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r}). \quad (59)$$

Учитывая этот факт заключаем, что подынтегральное выражение в (55) нечетно и, следовательно, интеграл от него обращается в нуль.

Наш вывод был сделан на основании того, что допускалось сохранение четности в сильных и электромагнитных взаимодействиях. Тот факт, что экспериментально не наблюдаются ядра с ненулевым дипольным моментом, и послужил основанием сделать заключение о сохранении четности в этих взаимодействиях.

## 2. Квадрупольные моменты ядер

Величину

$$Q \equiv \frac{1}{q_0} \sqrt{\frac{16\pi}{3}} Q_{20} = \frac{1}{q_0} \int d^3r (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) \quad (60)$$

называют *квадрупольным моментом ядра*. Квадрупольный момент имеет размерность площади. Он выражает величину отклонения распределения заряда в

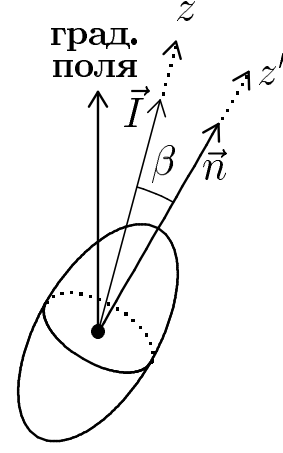


Рис. 8: Положение ядра относительно градиента поля.

ядре от сферически-симметричного. Если ядро вытянуто вдоль оси  $z$ , то квадрупольный момент положителен, если оно сплюснуто вдоль этой оси — то квадрупольный момент отрицателен.

В частном случае, когда ядро представляет эллипсоид вращения с равномерно распределенным зарядом, то<sup>5</sup>

$$Q = \frac{2}{5} Z(a^2 - b^2) = \frac{4}{5} Z\eta \bar{R}^2 \quad (61)$$

где  $a$  и  $b$  — оси эллипсоида (вдоль  $z$  оси и перпендикулярной к ней),  $\eta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$  — сплюснутость ядра, а  $\bar{R}^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  — его средний радиус.

Рассмотрим теперь систему, в которой распределение зарядов имеет цилиндрическую симметрию относительно некоторой оси  $\vec{n} = \vec{n}(\beta, \phi) = (\sin \beta \cos \phi, \sin \beta \sin \phi, \cos \beta)$ <sup>6</sup>. Рассмотрение такой классической системы позволит получить выражение, которое далее легко обобщается на квантовомеханический случай.

Рассмотрим две системы полярных координат: в одной из них полярная ось выбрана вдоль оси  $z$  (координаты  $r, \theta, \varphi$ ), в другой полярная ось направлена вдоль оси  $\vec{n}$  (координаты  $r' = r, \theta', \varphi'$ ), см. Рис. 10.6. При этом мы полагаем, что центры распределения электрических зарядов в обеих системах совпадают. Запишем выражение (60) для квадрупольного момента в штрихованной системе координат. С этой целью используем соотношение

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \beta + \sin \theta' \sin \beta \cos(\varphi - \varphi'). \quad (62)$$

<sup>5</sup> Более подробно см. книгу: М.А. Preston, Physics of the Nucleus. Addison-Wesley Pub. Company. 1962. Имеется русский перевод: М. Престон. Физика ядра. М.: Мир, 1964.

<sup>6</sup> Этот вопрос мы излагаем по книгам М. Престон. Физика ядра. М.: Мир, 1964 и К.Н. Мухин, Экспериментальная ядерная физика, т. 1, М.: Атомиздат, 1974.

Подставляя это выражение в (60) получим после несложных преобразований

$$Q(\cos \beta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \beta - 1)Q_0, \quad (63)$$

где

$$Q_0 = \frac{1}{q_0} \int d^3 r' r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) \rho(\vec{r}') \quad (64)$$

представляет квадрупольный момент системы зарядов с цилиндрической симметрией, когда ось  $\vec{n}$  направлена вдоль оси  $z$ . Он называется *собственным квадрупольным моментом ядра*.

Теперь будем считать, что ось  $z$  совпадает с направлением спина ядра  $\vec{I}$ . В квантовой механике величине  $\cos \beta$  можно сопоставить следующее выражение

$$\cos \beta \rightarrow \frac{m}{\sqrt{I(I+1)}}. \quad (65)$$

Поэтому квадрупольный момент для состояния с магнитным квантовым числом  $m$  следующим образом выражается через собственный квадрупольный момент ядра  $Q_0$

$$Q(m) = \frac{3m^2 - I(I+1)}{2I(I+1)} Q_0. \quad (66)$$

В частности,  $Q(m)$  достигает максимума при  $m = \pm I$ :

$$Q_{\max} = Q(m = \pm I) = \frac{2I - 1}{2(I+1)} Q_0 < Q_0. \quad (67)$$

Отметим, что в классическом случае при значении  $\cos \beta = \pm 1$  квадрупольный момент  $Q(\cos \beta)$  достигает максимума  $Q_{\max, \text{ кл.}} = Q(\cos \beta = \pm 1) = Q_0$ . В квантовой механике такое значение получается только в пределе  $I \rightarrow \infty$ .

Для экспериментального наблюдения квадрупольного момента ядра, последнее необходимо поместить во внешнее неоднородное поле. В этом случае спин ядра будет ориентирован относительно градиента поля. Однако в силу принципа неопределенностей в квантовой механике невозможно добиться полной ориентации спина (Рис. 10.6). Поэтому наблюдаемое значение квадрупольного момента представляет собой значение квадрупольного момента усредненное по всем возможным направлениям спина.

Отсюда, в частности, становится ясно, что при  $I = 0$  ориентация по всем направлениям одинакова и наблюдаемое значение квадрупольного момента равно нулю. В случае, когда  $I = \frac{1}{2}$  ориентация спина оказывается настолько слабой, что  $Q_{\text{набл.}}^{I=\frac{1}{2}} = 0$ . В общем случае наблюдаемое значение квадрупольного момента следующим образом связывается с собственным квадрупольным моментом ядра

$$Q_{\text{набл.}}^I = \frac{I(2I-1)}{(I+1)(2I+3)} Q_0. \quad (68)$$

Мы даем эту формулу без вывода. Из (68) следует, что отличные от нуля квадрупольные моменты могут быть только у ядер со спином равным и более 1.

**Квадрупольный момент дейтрона.** Простейшим ядром, у которого может быть ненулевое значение  $Q_{\text{набл.}}$ , является дейтрон. Эксперимент показывает, что для него

$$Q = 0,2860 \pm 0,0015 \text{ фм}^2. \quad (69)$$

Энергия ядра помещенного во внешнее неоднородное электрическое поле  $\mathcal{E}$  смещается на величину пропорциональную произведению градиента поля на квадрупольный момент

$$\Delta E = -\frac{1}{4} \nabla \mathcal{E} Q. \quad (70)$$

В частности такое смещение приводит к дополнительному сверхтонкому расщеплению в атомах, по сравнению со сверхтонким магнитным расщеплением. Исследование такого дополнительного расщепления и позволяет экспериментально измерять квадрупольные моменты ядер.

Существование ненулевого квадрупольного момента  $Q$  у дейтрона является прямым свидетельством о том, что дейтрон представляет собой смесь  $^1S_3$  и  $^1D_3$  состояний. Действительно, если бы дейтрон был чистым  $^1S_3$  состоянием, то в нем бы электрический заряд был распределен сферически-симметрично и квадрупольный момент был бы равен нулю. Величина вероятности обнаружить  $^1D_3$  состояние в дейтроне  $P_D$  порядка 5–6% качественно согласуется с экспериментальным значением квадрупольного момента у дейтрона.

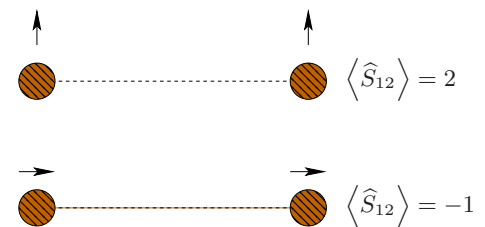


Рис. 9: Зависимость тензорного оператора от ориентации спинов нуклонов (указаны стрелками) по отношению к вектору  $\vec{r}$  соединяющему центры масс нуклонов.

### 3. Квадрупольный момент дейтрона и тензорные ядерные силы

Наличие примеси  $D$ -состояния у дейтрона имеет важное значение для понимания структуры ядерных взаимодействий, т.к. показывает наличие у них нецентральных сил между нуклонами. Такие силы называются *тензорными силами*. Они зависят не только от расстояния между нуклонами, но и от угла между направлением суммарного спина нуклонной па-

ры  $\vec{I}$  и вектора  $\vec{r}$  соединяющего центры масс нуклонов (Рис. 10.7). Из знака квадрупольного момента дейтрона можно заключить, что тензорные силы должны быть притягивательными, когда спин дейтрона направлен параллельно  $\vec{r}$ , и отталкивательными, когда  $\vec{I}$  и  $\vec{r}$  перпендикулярны. Для описания тензорных сил вводится тензорный потенциал, который имеет следующую структуру

$$\hat{V}_{\text{тен.}} = \left\{ 3 \frac{(\hat{\mathbf{s}}_1 \vec{r})(\hat{\mathbf{s}}_2 \vec{r})}{r^2} - \hat{\mathbf{s}}_1 \hat{\mathbf{s}}_2 \right\} V_{\text{тен.}}(r) \equiv \hat{S}_{12} V_{\text{тен.}}(r),$$

где  $\hat{\mathbf{s}}_1$  и  $\hat{\mathbf{s}}_2$  — операторы спина первого и второго нуклонов. Оператор  $\hat{S}_{12} \equiv 3 \frac{(\hat{\mathbf{s}}_1 \vec{r})(\hat{\mathbf{s}}_2 \vec{r})}{r^2} - \hat{\mathbf{s}}_1 \hat{\mathbf{s}}_2$  называется *тензорным оператором*. Среднее значение тензорного

оператора по всем направлениям вектора  $\vec{r}$  очевидно равно нулю. В связи с тем, что в синглетном спиновом состоянии нуклонной пары нет выделенного направления по спину, то в этом случае среднее значение тензорного оператора будет равно нулю. В случае, когда нуклонная пара находится в триплетном спиновом состоянии, среднее значение тензорного оператора отлично от нуля. Некоторые примеры таких средних значений приведены на Рис. 10.7.

#### Задача 10.1.

*Доказать справедливость формулы (49) для магнитного момента дейтрона.*