ІМПУЛЬСНІ ПРОЦЕСИ

Багато відомих задач імпульсної техніки вимагають дослідження спектрів послідовностей ідентичних імпульсів. Основні параметри, що характеризують геометричну форму або положення цих імпульсів (амплітуда, тривалість, момент виникнення фронту і ін.), можуть змінюватися за заданим законом або бути випадковими. Останнє має місце, коли імпульси спотворюються випадковими перешкодами або коли модульовану імпульсну послідовність можна розглядати, як квазідетермінований випадковий процес. Назвемо послідовність імпульсів, параметри яких є випадковими величинами, імпульсним випадковим процесом. Якщо форма імпульсів задана і випадковими є їх параметри, то послідовності імпульсів відповідає послідовність багатовимірних випадкових величин, а саме: початку кожного імпульсу можна приписати випадкові значення його параметрів. Імпульсний випадковий процес визначається нескінченним безліччю реалізацій, кожна з яких є послідовністю імпульсів. Таким чином, імпульсний процес $\xi(t)$ можна вважати квазідетермінованим, тобто подати його, як випадкову функцію часу t, що може бути задана як детермінована функція деякої кінцевої кількості випадкових величин $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$. Всі статистичні властивості такого процесу $\xi(t)=f(t, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ визначаються багатовимірним розподілом $p(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$. Прикладом такого процесу може бути сума тригонометричних функцій із випадковими амплітудами, що визначають випадкові функції із періодом 2π:

$$\xi(t) = f(t,(a_k),(b_k)) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

ПООДИНОКИЙ ІМПУЛЬС ТА СПАЛАХИ ОПТИЧНОГО ШУМУ

Одна із найпростіших моделей, що описує імпульсні процеси відноситься одиночний імпульс – форма F його відома, момент виникнення t_0 довільний:

$$x(t) = F(t-t_0) \qquad (1)$$

Нехай довжина імпульсу $\tau_{імп}$, а характерна ширина розподілу вірогідності виникнути τ_0. Процес (1) характеризується середнім значенням:

$$\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_0)p(t_0)dt_0 \approx \begin{cases} p(t-t')\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)d\theta, \tau_{imp} << \tau_0 \\ F(t-t_0'), \quad \tau_{imp} >> \tau_0 \end{cases} \qquad (2)$$

та кореляційною функцією:

$$\overline{xx_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-t_0)F(t-t_0+\tau)p(t_0)dt_0 \approx \begin{cases} p(t-t'')\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta+\tau)d\theta, \tau_{imp} << \tau_0 \\ F(t-t')F(t-t'+\tau), \ \tau_{imp} >> \tau_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Таким чином, поодинокий імпульс загалом нестаціонарний процес. Виключення становить випадок, коли поява імпульсу рівновірогідна на доволі значному інтервалі T. Тоді:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)d\theta \tag{4}$$

та:

$$\overline{xx}_{\tau} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta+\tau)d\theta \tag{5}$$

Отже, в межах інтервалу процес можна вважати стаціонарним. Якщо (5) виразити через спектральні амплітуди процесу (1) $\varphi(\omega)$, то:

$$\overline{xx}_{\tau} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{R} \varphi(\omega')\varphi(\omega'')e^{j(\omega'+\omega'')\theta + j\omega''\tau}d\theta = \frac{2\pi}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(\omega)\right|^{2}e^{-j\omega\tau}d\omega \tag{6}$$

Таким чином спектральна густина стаціонарного випадкового процесу типу поодинокого імпульсу становить:

$$G(\omega) = \frac{2\pi}{T}\left|\varphi(\omega)\right|^{2} \tag{7}$$

Інший різновид – імпульс типу:

$$x(t) = F(t)\cdot\xi(t) \tag{8}$$

тобто з регулярною огинальною $F(t)$, та випадковою субструктурою $\xi(t)$ – «спалахи» оптичного шуму. Процес при цьому нестаціонарний, проте коефіцієнт кореляції не залежить від форми огинальної, а визначається коефіцієнтом кореляції випадкового процесу:

$$R_{x(t)}(t,t+\tau) = \frac{F(t)F(t+\tau)\langle\xi(t+\tau)\xi(t)\rangle}{F(t)F(t+\tau)\langle\xi(t+\tau)\rangle\langle\xi(t)\rangle} = R_{\xi(t)}(t,t+\tau) \tag{9}$$

ВИПАДКОВА ІМПУЛЬСНА ПОСЛІДОВНІСТЬ

Більш поширеним є процес, що є суперпозицією однакових за формою проте різних за величиною імпульсів, що слідують один за одним і виникають в довільні моменти часу:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(t-t_i) \tag{10}$$

де – t_i характеризує момент виникнення i-того імпульсу, a_i – його «амплітуду». Тут не обов'язково, щоб $F(t)$=0 за умови $t<t_i$. Достатньо щоб $F(t)$ прямувала до нуля достатньо швидко при $|t|\to\infty$. Моменти t_i можна зв'язати із якоюсь характерною особливістю імпульсу: максимумом, мінімумом, точкою перетину нуля тощо. Процеси типу (10) виникають в багатьох фізичних задачах. Зокрема, такі імпульсні послідовності можуть бути струм або напруга на виході чотирьохполюсника, на вхід якого подано послідовність дельта-подібних імпульсів. При цьому імпульс завжди можна вважати дельта-подібним, якщо ширина цього імпульсу набагато менше характерного часу реакції чотирьохполюсника. Процеси типу (10) типові для сигналів на виході детекторів оптичного або рентгенівського випромінювання, коли форма імпульсу визначається параметрами детектору і приймального тракту, а амплітуда імпульсів та час їх появи характеристиками випромінювання. Ще один приклад – це відбивання від середовища хвильового імпульсу посланого в середовище без дисперсії проте із неоднорідностями. Імпульси, що повернуться до спостерігача будуть мати різну величину та амплітуду.

Можливе і більш загальне формулювання, що передбачає довільність і форми самих імпульсів, які визначаються деяким набіром із m випадкових параметрів:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} F(t - t_i, \vec{a}_i), \quad \vec{a}_i = \{a_1, a_2 \ldots a_m\} \qquad (11)$$

Надалі зробимо деякі найпростіші припущення відносно статистичних характеристик процесів (10) та (11):

1). Всі t_i та a_i статистично незалежні, а отже багатовимірний розподіл системи є добутком одновимірних розподілів:

$$p_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n, t_1, t_2 \ldots t_n) = \prod_{i=1}^{n} p(\vec{a}_i) \cdot p(t_i)$$

2). Імовірність появи імпульсу в проміжку часу від t до $t+dt$ не залежить від t, а пропорційна тільки t:

$$p(t)dt = \alpha \cdot dt, \quad \alpha = const$$

ЗАДАЧА БЕРНУЛІ І СТАТИСТИКА ПУАССОНА

Вимога пропорційності часу є доволі загальною і її виконання визначає статистику такого роду процесів. Покажемо, що ця модель зводиться до схеми задачі Бернулі. Частина класичних задач в схемі Бернулі не вимагає локалізації в часі, інші припускають і навіть вимагають таку локалізацію. До перших відноситься задачі із довільного вкиданням чорних та білих шарів в урну, задачі про імовірність послідовного випадання орла при киданні монети, задача про флуктуацію кількості частинок в об'ємі: тобто задачі в яких провадяться N випробувань, 2 взаємовиключаючі результати яких А та В виникають із імовірністю p та q. Необхідно встановити імовірність того, що в N випробуваннях n разів випаде подія А. Інший тип задач можна звести до задачі про випадкові блукання, або суму випадкових фазорів. До цього ж класу задач відносяться задачі про телефонні виклики, реєстрацію космічного фону, дробовий ефект в вакуумі. В своїй основі ці задачі передбачають, що відома імовірність p деякої події (наприклад реєстрація імпульсу від космічного фону) за маленький інтервал часу τ. Необхідно знайти імовірність того, що протягом часу T відбудеться n таких подій. Це формулювання припускає використання схеми Бернулі і в задачі про імпульсні послідовності. Дійсно якщо імовірність появи імпульсу протягом інтервалу часу dt є $p=\alpha dt$, а імовірність його непояви є $q=(1-\alpha)dt$, то імовірність появи n імпульсів протягом інтервалу часу T становить:

$$P_N(n) = C_N^n p^n \cdot q^{N-n} \tag{12}$$

В границі $dt \to 0$, p також прямує до нуля, а кількість інтервалів часу $N=T/dt\to\infty$. Середня кількість імпульсів за одиницю часу не має залежати від того, протягом якого часу T вона фіксується. Середнє значення кількості імпульсів можна визначити як $\langle n \rangle = pN$. Отже (12) переписується як:

$$P_N(n) = C_N^n \left(\frac{\langle n\rangle}{N}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\langle n\rangle}{N}\right)^{N-n} = \frac{\langle n\rangle^n}{n!} 1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right)^{N-n} \tag{13}$$

В границі $N \to \infty$ отримаємо розподіл Пуасона:

$$P_N(n) = \frac{\langle n\rangle^n}{n!} e^{-\langle n\rangle} = \frac{(\alpha T)^n}{n!} e^{-\alpha T} \tag{14}$$

ВИПАДКОВА ІМПУЛЬСНА ПУАСОНОВА ПОСЛІДОВНІСТЬ

Для випадкової імпульсної послідовності, що описується формулою (11) всі середні типу:

$$\left\langle F(t-t_i,\vec{a}_i)\right\rangle = \overline{F}; \quad \left\langle F(t-t_i+\tau,\vec{a}_i)\right\rangle = \overline{F_\tau}; \quad \left\langle F(t-t_i,\vec{a}_i)F(t-t_i+\tau,\vec{a}_i)\right\rangle = \overline{FF_\tau} \tag{15}$$

не залежать від індексу i. Усереднюючи спочатку по i а потім по n, маємо:

$$\overline{x} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} F(t-t_i,\vec{a}_i)\right\rangle = \overline{n}\cdot\overline{F} \qquad \overline{x_\tau} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} F(t-t_i+\tau,\vec{a}_i)\right\rangle = \overline{n}\cdot\overline{F_\tau} \tag{16}$$

$$\overline{xx_\tau} = \left\langle \sum_{i}^{n}\sum_{i'}^{n} F(t-t_i,\vec{a}_i)F(t-t_{i'}+\tau,\vec{a}_i)\right\rangle = \left\langle \sum_{i=i'}^{n} \overline{FF_\tau}\right\rangle + \left\langle \sum_{i\neq i'}^{n} \overline{F}\cdot\overline{F_\tau}\right\rangle =$$

$$= \overline{n}\cdot\overline{FF_\tau} + (\overline{n^2}-\overline{n})\overline{F}\cdot\overline{F_\tau}$$

$$B(\tau) = \overline{xx_\tau} - \overline{x}\cdot\overline{x_\tau} = \overline{n}\cdot\overline{FF_\tau} + (\overline{n^2}-\overline{n}-\overline{n}^2)\overline{F}\cdot\overline{F_\tau}$$

Розглянемо інтервал часу $T >> \tau_{імп}$. Будемо вважати, що поява будь-якого імпульсу в будь-який момент часу рівновірогідна $p(t_i)=1/T$. Оскільки, $T >> \tau_{імп}$, то:

$$\overline{F} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)d\theta = \overline{F_\tau} \qquad \overline{FF_\tau} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta+\tau)d\theta \tag{17}$$

середні від часу залежить не будуть. Статистика, яка відповідає цій моделі, очевидно, пуасонівська. Число імпульсів n, що з`являються за N інтервалів часу, з вірогідністю p на кожному інтервалі становить:

$$p(n) = \frac{e^{-\alpha}\overline{n}^n}{n!} \qquad \overline{n} = pN \qquad \overline{n^2} = \overline{n}(\overline{n}+1) \qquad \sigma_n^2 = \overline{n^2} - \overline{n}^2 = \overline{n} \tag{18}$$

тут <n> – середня кількість імпульсів на інтервалі T. Дисперсія для пуасонівського процесу співпадає із середнім. Використовуючи (17) та (18) із (16) отримаємо:

$$\bar{x} = \Omega \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) d\theta \quad B(\tau) = \Omega \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta \quad \Omega = \frac{\bar{n}}{T} \tag{19}$$

де Ω=α середня частота появи імпульсів. Отримані співвідношиння (19) отримали назву *формули Кемпбела*. Для спектральної густини маємо:

$$G(\omega) = 2\pi\Omega \left|\varphi(\omega)\right|^2 \tag{20}$$

де φ(ω) – фур'є образ від форми імпульсу.

ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ІМПУЛЬСНОГО ПУАССОНІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

Всю доступну статистичну інформацію про імпульсний пуассонів процес звичайно ж можна отримати знайшовши функцію розподілу. Відшукаємо для цього характеристичну функцію, скориставшись тим, що кожна із складових в (11) є незалежною від інших. В такому разі характеристична функція $\theta_x(u \mid n)$ умовного розподілу того, що в інтервалі від $-T/2$ до $T/2$ відбудеться n імпульсів буде:

$$\theta_x(u|n) = \prod_{i=1}^{n} \theta_{F_i}(u), \quad F_i = F(t - t_i, \vec{a}_i) \tag{21}$$

де характеристична функція для $F(t\text{-}t_i,\boldsymbol{a}_i)$ вочевидь не залежить від i і визначається як:

$$\theta_{F_i}(u) = \left\langle \exp(iuF(t - t_i, \vec{a}_i)) \right\rangle = \int p(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(iuF(t - \tau, \vec{a})) p(\tau) d\tau \tag{22}$$

Імовірність появи імпульсу на інтервалі від $-T/2$ до $T/2$ не залежить від t, а імпульс обов'язково має з'явитись десь всередині цього інтервалу. Отже рівномірний розподіл по τ має бути про нормований на одиницю на цьому інтервалі:

$$p(\tau) d\tau = \frac{\alpha d\tau}{\int_{-T/2}^{T/2} \alpha d\tau} = \frac{d\tau}{T} \tag{23}$$

Із урахуванням цього, (21) набуває вигляду:

$$\theta_x(u|n) = \left[\int p(\vec{a})d\vec{a} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(iuF(t-\tau,\vec{a}))\frac{d\tau}{T} \right]^n \qquad (24)$$

Безумовна характеристична функція може бути отримана із умовної (24) шляхом усереднення по n із урахуванням пуассонової статистики для кількості імпульсів для імовірності виникнення n імпульсів на інтервалі від $-T/2$ до $T/2$:

$$\theta_x(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_x(u|n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha T}}{n!} \left[\alpha \int p(\vec{a})d\vec{a} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(iuF(t-\tau,\vec{a}))d\tau \right]^n \qquad (25)$$

де $\alpha T=\langle n\rangle$. (25) зручно подати у такому виді:

$$\theta_x(u) = \exp\left(\alpha \int p(\vec{a})d\vec{a} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(iuF(t-\tau,\vec{a}))d\tau - \alpha T \right) = \qquad (26)$$

$$= \exp\left(\alpha \int p(\vec{a})d\vec{a} \int_{t-T/2}^{t+T/2} (\exp(iuF(\upsilon,\vec{a}))-1)d\upsilon \right)$$

де в останньому виразі зроблено заміну $\upsilon = t - \tau$. Дужка під інтегралом відмінна від нуля тільки в межах υ, де $F(\upsilon,\boldsymbol{a})$ помітно відрізняється від нуля, тобто в межах імпульсу. Тому для всіх значень τ, що відступають від меж інтервалу $-T/2$ до $T/2$ не менше ніж на тривалість імпульсу Δ, межі інтегрування можна розсунути до $\pm\infty$. Таким чином нехтуючи граничними ефектами, характеристичну функцію імпульсного пуассонова процесу можна подана як:

$$\theta_x(u) = \exp\left(\alpha \int p(\vec{a})d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(iuF(\upsilon,\vec{a}))-1)d\upsilon \right) \qquad (27)$$

Розів’ємо в ряд по степеням iu аргумент експоненти в (27). Коефіцієнти при $(iu)^m/m!$ в цьому ряді, за визначенням, є кумулянти розподілу імпульсного пуассонова процесу. Розкладаючи в ряд експоненту в (27) отримаємо вираз для кумулянтів:

$$k_m = \alpha \int p(\vec{a})d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F^m(\upsilon,\vec{a})d\upsilon \qquad (28)$$

Зокрема для першого та другого кумулянта, тобто середнього та дисперсії знайдемо:

$$\bar{x} = \alpha \int p(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F(\upsilon, \vec{a}) d\upsilon, \quad \sigma^2 = \alpha \int p(\vec{a}) d\vec{a} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\upsilon, \vec{a}) d\upsilon \tag{29}$$

Якщо випадковою є тільки амплітуда імпульсу (процес типу (10)), то вирази для середнього і дисперсії набувають вигляду:

$$\bar{x} = \alpha \langle a \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F(\upsilon, \vec{a}) d\upsilon, \quad \sigma^2 = \alpha \langle a^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\upsilon, \vec{a}) d\upsilon \tag{30}$$

За умови фіксованої амплітуди ми приходимо до формули Кемпбела:

$$\bar{x} = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(\upsilon, \vec{a}) d\upsilon, \quad \sigma^2 = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\upsilon, \vec{a}) d\upsilon \tag{31}$$

Зворотним перетворенням Фур'є із характеристичної функції отримаємо функцію розподілу імпульсного пуассонового процесу:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-iux} \theta_x(u) du = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(-iux + \sum_{m=1}^{\infty} k_m \frac{(iu)^m}{m!} \right) du = \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(-iux + iu\langle x \rangle - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \sum_{m=3}^{\infty} k_m \frac{(iu)^m}{m!} \right) du$$

Із (32) видно, що якщо можна знехтувати членами починаючи з m=3, то функція розподілу буде гаусова. Для з'ясування умов такого нехтування введемо позначення:

$$k_1 = \langle x \rangle, \quad k_2 = \sigma^2, \quad \xi = \frac{x - \langle x \rangle}{\sqrt{k_2}}, \quad \Phi^{(n)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^n \exp(-\xi^2/2)}{d\xi^n} \tag{33}$$

Якщо розкласти експоненту в (32), починаючи із m=3, то почленне інтегрування по частинам дозволяє подати $p(x)$ у вигляді ряду по похідним $\Phi^{(n)}(x)$. Збираючи члени одного порядку по α, отримаємо:

$$p(x) = \frac{\Phi^{(0)}(x)}{\sigma_x} - \frac{k_3 \Phi^{(3)}(x)}{3! \sigma_x^4} + \left[\frac{k_4 \Phi^{(4)}(x)}{4! \sigma_x^5} + \frac{k_3^2 \Phi^{(7)}(x)}{72 \sigma_x^7} + \ldots \right] \tag{34}$$

Це так званий *ряд Еджворта*, перший член якого порядку $\alpha^{-1/2}$, другий α^{-1}, третій $\alpha^{-3/2}$ і т.д. Із збільшенням α домінування першого члену буде ставати дедалі більшим. Для оцінки значення α, при якому можна знехтувати всіма іншими членами розпишемо перші два члени в (34) в явному вигляді:

$$p(x) = \frac{\exp(-\xi^2/2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\left(1 - \frac{k_3\xi(3-\xi^2)}{3!\sigma_x^3}\right) \tag{35}$$

Наявність експоненційного множника дозволяє не розглядати значення ξ більше ніж 2, а отже і $\xi(3-\xi^2)$ також не більше ніж 2. Тоді отримаємо оцінку:

$$\frac{k_3}{3\sigma_x^3} \le \frac{\alpha\langle a^3\rangle \int_{-\infty}^{\infty}|F(\upsilon)|^3 d\upsilon}{3\left(\alpha\langle a^2\rangle \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\upsilon)d\upsilon\right)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|F(\upsilon)|^3 d\upsilon}{\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\upsilon)d\upsilon\right)} << 1 \tag{36}$$

Якщо $\int_{-\infty}^{\infty} F(\upsilon)d\upsilon = 1$, то інтеграл в чисельнику буде порядку $1/\Delta^2$, а в знаменнику $1/\Delta$.

Отже умова (36) зводиться до α·Δ>>1, тобто кількість імпульсів, що виникають за час тривалістю порядку самого імпульсу має буди значним. В цьому разі статистика імпульсного пуассонового процесу стає гаусовою, що , очевидно, є наслідком ЦГТ.

ФОТОВІДЛІКИ У ВИПАДКОВОМУ СВІТЛОВОМУ ПОЛІ

Розглянемо статистику фотоелектронного струму коли катод освітлюється світлом з флуктуючою інтенсивністю. Задача актуальна, оскільки дозволяє отримати принципову відповідь – чи можливо за статистикою фотоструму встановити статистику світлового поля?

Диференційна вірогідність *dP* появи фотовідліку зв час *dt* становить:

$$dP = \beta I(t)dt \tag{37}$$

де β коефіцієнт, що характеризує чутливість детектора, а *I(t)* інтенсивність світла. Середнє число фотоелектронів за час *T* становить:

$$\alpha = \langle n\rangle = \beta\int_0^T I(t)dt = \beta U \qquad U = \int_0^T I(t)dt \tag{38}$$

де U енергія світлового потоку, що пройшов через детектор за час T. Якщо інтенсивність світла величина стала, то статистика фотоелектронів є пуасонівська (18) із середнім (38). Вірогідність (18) слід інтерпретувати як умовну, що відповідає конкретному значенню U. Для випадкового поля, а отже і випадкового потоку, повну статистику знайдемо усереднивши за функцією розподілу по U:

$$P(n) = \int_0^\infty P(n\,|\,U)\,p(U)\,dU = \int_0^\infty \frac{(\beta U)^n}{n!} e^{-\beta U} p(U)\,dU \;\rangle n \langle = \beta \rangle U \langle = \beta \rangle I \langle T \qquad (39)$$

$$\sigma_n^2 = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \bar{n} + \beta^2 (\overline{U^2} - \bar{U}^2) = \bar{n} + \beta^2 \sigma_U^2$$

Вираз (39) називають *формула Манделя*. Як видно, дисперсія фотовідліків в випадковому полі завжди більше $<n>$.

Величина дисперсії потоку істотно залежить від співвідношенням між часом спостереження та часом кореляції поля. Дійсно, за малих значень кореляції, статистика фотовідліків взагалі нечутлива до статистики світового поля. Внаслідок ергодичності в такому випадку маємо деяку усереднену інтенсивність фотовідліків $\alpha \approx \beta T < I >$. Тобто статистика фотовідліків буде пуасонівська. Наприклад, для кореляційної функції $r(\tau) = exp\{-\tau/\tau_C\}$ дисперсія фотовідліків буде становити:

$$\sigma_n^2 = \bar{n} + \bar{n}^2 \frac{\tau_C^2}{2T^2}\left(e^{-2\frac{T}{\tau_C}} - 1 + 2\frac{T}{\tau_C} \right) \approx \begin{cases} \bar{n} + \bar{n}^2, & \tau_C >> T \\ \bar{n}, & \tau_C << T \end{cases} \qquad (40)$$

Отже, для збереження інформації про статистику випромінювання час спостереження має бути набагато менше часу кореляції світлового поля. Тоді, можна вважати, що $U=IT$ і формулу Манделя слід переписати у вигляді:

$$P(n) = \int_0^\infty \frac{(\beta I T)^n}{n!} e^{-\beta I T} p(I)\,dI \qquad (41)$$

Для стабільного лазерного випромінювання з розподілом інтенсивності у вигляді дельта-функції, маємо пуасонівську статистику. Якщо статистика гаусова із дисперсі σ^2, як у теплового випромінювання або у когерентного, розсіяного на неоднорідному екрані, то розподіл інтенсивності експоненційний, а статистика фотовідліків згідно із (41) буде:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^n} \qquad \langle n \rangle = \beta T \sigma^2 \qquad \sigma_n^2 = \bar{n}(1+\bar{n}) \tag{42}$$

Звичайно, більш цікава зворотна задача, як по статистиці фотовідліків встановити статистику випромінювання. Формальне її розв’язок зводиться до обернення формули Манделя.