МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ ІЗ НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОЩЕННЯМИ

За логікою попереднього викладу за амплітудною та фазовою модуляцією слід розглянути модуляцію частоти квазігармонічного процесу. Такого роду процес зручніше розглянути із використанням поняття *процесу із незалежними прирощеннями.* Доволі часто випадковий процес *u(t)* можна подати у вигляді суми прирощень, які на неперетинних інтервалах часу незалежні:

$$u(t) = u(0) + \sum_{i=0}^{n} \Delta_i u \qquad \textbf{(1)}$$

До них відноситься, наприклад, зміщення броунівської частинки, набіг фази генератора, проходження світла через випадковий фазовий екран, заряд, що переноситься електронами на анод лампи, число радіоактивних ядер, що розпались (коли ще можливо знехтувати кількістю зменшенням таких, що не розпалися) тощо. Унаслідок незалежності доданків в **(1)**, дисперсія *u(t)* буде:

$$\begin{aligned} &D[u(t)] = D[u(0)] + \sum_{i=0}^{n-1} D[u(\Delta t_i)], \\ &u(\Delta t_i) = u(t_{i+1}) - u(t_i) \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

Тоді, скориставшись ЦГТ, можна сказати, що функція *u(t)* неперервна функція із незалежними прирощеннями і в границі розподілена нормально із дисперсією $\int_0^t B(t')dt', \quad B(t)>0$.

Припустимо, що процес *однорідний за t*. Це означає, що $\Delta_i u$ залежить від довжини інтервалу Δt та не залежить власне від значень, набутих функцією в момент часу t_i. Будемо вважати, не втрачаючи загальності, що $u(0)=0$. Тоді, *u(t)* дорівнює сумі своїх прирощень на інтервалі від 0 до *t*.

$$\Delta_i u = u(t_{i+1}) - u(t_i) = \eta(t_{i+1} - t_i) = \eta(\Delta t_i) \quad \textbf{(3)}$$

Попередні рівняння набувають тоді вигляду:

$$u(t) = \eta(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta(\Delta t_i) \quad \textbf{(4)}$$

та для дисперсії:

$$D[\eta(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} D[\eta(\Delta t_i)], \quad \textbf{(5)}$$

Єдиним невід’ємним розв’язком функціонального рівняння **(5)** для дисперсії – це лінійна однорідна функція часу:

$$D[\eta(t)] = Bt, \qquad B>0 \quad \textbf{(6)}$$

тобто дифузійний закон. Таким чином, однорідна неперервна функція з незалежними прирощеннями розподілена за нормальним законом із дисперсією пропорційною *t*.

Тепер варто звернути увагу на одну важливу обставину – неперервна функція з незалежними прирощеннями така, що не диференціюється. Дійсно, дисперсія прирощення одного порядку із Δt. Для однорідної функції взагалі $D[\Delta u]=B\Delta t$. Відповідно:

$$D\left[\frac{\Delta u}{\Delta t}\right] = \frac{1}{\Delta t^2} D[\Delta u] \sim \frac{1}{\Delta t} \quad \textbf{(7)}$$

Отже, в будь-який момент часу дисперсія нормально розподіленої величини $\Delta u/\Delta t$ (швидкості) необмежено зростає при $\Delta t \to 0$. Тоді не мають сенсу ні миттєва швидкість броунівської частки *ds/dt*, ні миттєве значення струму *dq/dt*, ні миттєве значення частоти $d\varphi/dt$. Однак, всі ці величини піддаються виміру, а,отже, реально існують! Розглянемо детальніше це питання.

Для конкретності будемо розглядати броунівський рух. Зміщення частки – це однорідна функція часу із незалежними прирощеннями. Тоді:

$$s(t) = \int_0^t ds(\xi) \tag{8}$$

де $ds(\xi)$ елементарне прирощення на елементі $(\xi, \xi+d\xi)$. Для зручності будемо вважати, що $\langle s(t)\rangle=0$. Відповідно:

$$D[u(t)] = \langle u^2(t)\rangle = \int_0^t \int_0^t du(\xi')du(\xi'') \tag{9}$$

Згідно із **(6)** дисперсія має бути пропорційна t, а це можливо за умов, коли підінтегральний вираз має вигляд:

$$du(\xi')du(\xi'') = B\delta(\xi' - \xi'')d\xi' d\xi'' \tag{10}$$

Якщо формально ввести миттєву швидкість $v=du/d\xi$, то:

$$dv(\xi')dv(\xi'') = B\delta(\xi' - \xi'') \tag{11}$$

Таким чином швидкість слід вважати δ-корельованим випадковим процесом. Отже середній квадрат при всякому t нескінченно великий. Проблема виникає в фізичній неможливості неперервного процесу з незалежними прирощеннями. Справді, незалежність прирощень можлива за умов, коли за час між двома спостереженнями броунівська частка відчуває багато поштовхів. Іншими словами час спостереження набагато більше ніж час між ударами, або частота флуктуацій набагато більше характерної частоти системи. З другого боку, визначення неперервності вимагає, щоб при необмеженому $\Delta t \to 0$, також і $\Delta u \to 0$ хай навіть тільки за вірогідністю. Обидві умови сумісні тільки за умов, коли частота флуктуації необмежена, або час між поштовхами дорівнює нулю, що не фізично. Однак, в широкому класі задач така ідеалізація цілком припустима, що в значній мірі спрощує їх розв'язок.

ВІНЕРОВСЬКИЙ ПРОЦЕС

Розглянемо випадковий процес, що є інтегралом від деякої випадкової функції:

$$\xi(t) = \int_0^t \eta(\theta)d\theta \quad \dot{\xi}(t) = \eta(t) \tag{12}$$

із такими статистичними характеристиками:

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta\eta_\tau \rangle = B_0(\tau) \equiv \sigma_0^2 R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega \tag{13}$$

Власне ця модель є граничний випадок моделі із незалежними прирощеннями, розглянутої в попередньому розділі (вираз **(1)**). Якщо $\xi(t)$ є випадковий набіг фази генератора $\varphi(t)$, то $\eta(t)$ є, відповідно, частота $\omega(t)$. Тоді із **(12)** отримаємо:

$$\langle \xi \rangle = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

$$\langle \xi\xi_\tau \rangle = \int_0^t \int_0^{t+\tau} B_0(t_2 - t_1) dt_2 dt_1$$

Зробимо заміну змінних $t_2 - t_1 = \tau'$, $t_1 = \zeta$, що фактично означає перехід від прямокутної області інтегрування до трапецеїдальної (Рис. 1). Тоді (14) перепишеться як:

$$\langle \xi\xi_\tau \rangle = \int_0^t \int_0^{t+\tau} B_0(t_2 - t_1) dt_2 dt_1 = \int_0^t B_0(\tau') d\tau' \int_0^{-\tau'+t} d\varsigma + \int_{-t-\tau}^{0} B_0(\tau') d\tau' \int_{-\tau'}^{t+\tau} d\varsigma - \int_{-\tau}^{0} B_0(\tau') d\tau' \int_{-\tau'+t}^{t+\tau} d\varsigma = \qquad \textbf{(15)}$$

$$= \int_0^t B_0(\tau')(t-\tau') + \int_{-t-\tau}^{0} B_0(\tau') d\tau'(t+\tau+\tau') - \int_{-\tau}^{0} B_0(\tau')(\tau+\tau') d\tau' = 2\int_0^t B_0(\tau')(t-\tau') +$$

$$+ \int_t^{t+\tau} B_0(\tau') d\tau'(t+\tau-\tau') - \int_0^{\tau} B_0(\tau')(\tau-\tau') d\tau'$$

Тут враховано парність функції кореляції $B_0(\tau)=B_0(-\tau)$. Дисперсія $\xi(t)$ тоді дорівнює:

$$\langle \xi^2 \rangle = 2\int_0^t (t-\tau) B_0(\tau) d\tau \qquad \textbf{(16)}$$

Дисперсія $\xi(t)$, може бути виражена і через спектральну густину $G_0(\omega)$.

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_0^t \int_0^t \langle \eta(\vartheta)\eta(\vartheta') \rangle d\vartheta d\vartheta' = 2\int_0^\infty G_0(\omega) d\omega \int_0^t \int_0^t \cos(\omega(\vartheta - \vartheta')) d\vartheta d\vartheta' = \qquad \textbf{(17)}$$

$$= 2\int_0^\infty \frac{G_0(\omega)}{\omega} d\omega \int_0^t \sin(\omega(t-\vartheta')) d\vartheta' = \int_0^\infty G_0(\omega) \left(\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega t/2} \right)^2 d\omega$$

Оскільки дисперсія залежить від часу, то в загальному випадку процес нестаціонарний. Для малих інтервалів часу, коли кореляційну функцію B_0 можна вважати сталою, інтеграл (16) набуває вигляду:

$$\sigma^2 = \overline{\xi^2} \approx B_0 t^2 = \sigma_0^2 t^2 \quad (t \ll \tau_c) \qquad \textbf{(18)}$$

Натомість, коли інтервал часу набагато більше часу кореляції, в першому інтегралі виразу (16), верхню границю можна вважати безкінечною і тоді:

$$\sigma^2 = 2D(t - \tau_0) \quad D = \int_0^\infty B_0(\tau) d\tau \qquad \tau_0 = \frac{1}{D}\int_0^\infty \tau B_0(\tau) d\tau \qquad \textbf{(19)}$$

Важливим випадком є випадок, коли $\eta(t)$ є білий шум. Тоді, $G_0(\omega)=G$, дисперсія безкінечна, і:

$$\sigma_0^2 = \infty \quad B_0(\tau) = 2D\delta(\tau) \quad D = \pi G \qquad \textbf{(20)}$$

Підставивши (20) в (14) отримаємо:

$$\sigma_0^2 = 2Dt \qquad \textbf{(21)}$$

Тобто дисперсія росте із часом лінійно. Такий же результат було отримано для однорідного процесу із незалежними прирощеннями в границі $n \to \infty$. Процес, дисперсія якого лінійно залежить від часу називається *вінеровський процес*. Зокрема, інтеграл від білого шуму буде вінеровським процесом. Інша назва дифузійний процес, оскільки (12) описує броунівський рух (дифузію броунівської частки).

Процес (12), як уже зазначалося, описує флуктуації фази в автогенераторі. Звичайно, якщо мова заходить про фазу коливань, то діапазон її значень вважається $[-\pi,\pi]$. Однак розв’язок рівняння (12) передбачає зміни фази в діапазоні $[-\infty,\infty]$. Очевидно, між розподілом вірогідностей в обох випадках має існувати певний зв`язок. Введемо до розподілу фази $P(\varphi)$ взятому в межах $[-\infty,\infty]$, розподіл $P_{2\pi}(\varphi)$, що «звернуто» до інтервалу періодичності $[-\pi,\pi]$:

$$p_{2\pi}(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} p(\varphi + 2\pi n) \qquad \textbf{(22)}$$

Зміст останнього виразу стає зрозумілим, якщо згадати, що всі значення φ, що відрізняються на $2\pi n$, для періодичної (з періодом 2π) функції еквівалентні. Отже, щоб отримати вірогідність для фази визначеної в інтервалі $[-\pi,\pi]$, вірогідності цих значень слід підсумувати. Існує два граничних випадки, коли вираз (22) спрощується. Перший, коли дисперсія фази набагато менше інтервалу періодичності, і другий навпаки. Тоді, очевидно:

$$\begin{aligned} p_{2\pi}(\varphi) &\approx p(\varphi + 2\pi n) \qquad 2\pi >> \sigma_\varphi \\ p_{2\pi}(\varphi) &\approx \frac{1}{2\pi} \qquad\qquad 2\pi << \sigma_\varphi \end{aligned} \qquad \textbf{(23)}$$

Остання умова реалізується, наприклад, коли фаза є випадковий процес вінеровського типу, оскільки з плином часу дисперсія необмежено зростає. При цьому розподіл $P(t,\varphi)$ відповідає нестаціонарному процесу, натомість $P_{2\pi}(\varphi)$ стаціонарному. Таким чином, процес із дифузією фази можна розглядати як стаціонарний процес із рівномірним розподілом $P_{2\pi}(\varphi)=1/2\pi$.

ЧАСТОТНА МОДУЛЯЦІЯ

Розглянемо квазігармонічний процес:

$$\xi(t) = a\cos(\omega_0 t + \int_0^t \eta(\theta)d\theta) \tag{24}$$

де випадковий процес $\eta(t)$ описується виразом (12) і описує модуляцію частоти за деяким випадковим законом. Тоді, зміна фази є вінеровським процесом. Відповідно, кінець кінцем дисперсія флуктуацій зростає за лінійним законом, а розподіл фази стриміть до рівномірного. Для вузькосмугового процесу із рівномірним розподілом фази характеристична функція $\Theta(\omega)$ є фактично перетворенням Ганкеля від функції $p(\rho)/\rho$:

$$\Theta(\omega) = \int_0^\infty p(\rho)J_0(\omega\rho)d\rho = \int_0^\infty \frac{p(\rho)}{\rho}J_0(\omega\rho)\rho d\rho \tag{25}$$

Одновимірний розподіл можна знайти шляхом зворотного Фурьє перетворення характеристичної функції:

$$p(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Theta(\omega)\exp\{-j\omega\xi\}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} p(\rho)d\rho\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}J_0(\omega)\exp\{-j\omega\xi\}d\omega = \tag{26}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{\infty}d\rho\frac{p(\rho)}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{|\xi|}^{\infty}d\rho\frac{\delta(\rho-a)}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} = \begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-\xi^2}}, |\xi| <= a\\ 0, \quad |\xi| > a\end{cases}$$

Тут враховано значення розривного інтегралу і те, що функція розподілу детермінованої величини, тобто огинальної вузькосмугового процесу є $\delta(\rho - a)$.

Оскільки, фаза розподілена рівномірно, то $<\xi>=0$, процес стаціонарний і в спектрі частотно-модульованого коливання, на відміну від АМ та ФМ немає дискретної лінії на частоті ω_0. Ці результати правдиві для будь-якої статистики частотної модуляції, якщо спектр модуляції відмінний від нуля на нульовій частоті. В іншому випадку дисперсія стриміть до сталого значення.

Нехай тепер процес $\eta(t)$ є гаусовим. Гаусовими будуть і флуктуації фази $\varphi(t)$. Тоді розподіл для процесу $\varphi(t) = \int_0^t \eta(\vartheta)d\vartheta$:

$$p(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Psi(\tau)}}e^{-\frac{\varphi^2}{2\Psi(\tau)}} \tag{27}$$

де $\Psi(\tau)=\sigma_0{}^2 R_0(\tau)$ кореляційна функція фази, що визначається згідно із (15), (17). Тоді кореляційна функція частотномодульованого процесу (24) знайдеться усередненням $\xi\xi_\tau$ із допомогою розподілу (27):

$$B(\tau)=\frac{a^2}{2}e^{-\frac{\sigma_0^2 R_0(\tau)}{2}}\cos\omega_0\tau \qquad \textbf{(28)}$$

Як видно із (29) спектр ЧМ коливання симетричний відносно ω_0 для гаусової модуляції. Частотна модуляція не змінює інтегральної інтенсивності коливань. Функція $\psi(\tau)$ при малих τ змінюється за квадратичним законом (18), а при великих за лінійним (19):

$$\psi(\tau)=\begin{cases}\tau^2/2, & \tau \ll \tau_0\\ D/\sigma_0^2\,(\tau-\tau_0), & \tau \gg \tau_c\end{cases} \qquad \textbf{(29)}$$

Розглянемо два відповідних предільних випадки.

Інтенсивність модуляції доволі значна:

$$\sigma_0^2\tau_0^2 \gg 1 \Rightarrow G_0(0) \gg \omega_0 \qquad \textbf{(30)}$$

Тоді функція кореляції встигне зменшитися майже до нуля на квадратичній ділянці. Вираз (29) набуває вигляд:

$$B(\tau)=\frac{a^2}{2}e^{-\sigma_0^2\tau^2/2}\cos\omega_0\tau \qquad \textbf{(31)}$$

Тоді спектр ЧМ коливання має гаусів вид:

$$G(\omega)=\frac{a^2}{4\sigma_0\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma_0^2}}+e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\sigma_0^2}}\right) \qquad \textbf{(32)}$$

із характерною шириною $\Delta\omega\sim\sigma_0$. Вважаючи, що $\tau_0\sim\tau_C\sim1/\Delta\omega_0$, отримаємо відношення спектра флуктуацій до спектра ЧМ коливань:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\approx\sqrt{\frac{\Delta\sigma_0^2}{\Delta\omega_0^2}}\approx\sqrt{\Delta\sigma_0^2\tau_0^2}\gg 1 \qquad \textbf{(33)}$$

Отже, спектр флуктуацій набагато ширший, ніж спектр модуляції у випадку коли спектр модуляції високий та вузький.

За умов не інтенсивної, або доволі швидкої модуляції (спектр широкий та низький) виконується:

$$D\tau_c \ll 1 \qquad \textbf{(34)}$$

Помітне зменшення кореляційної функції відбувається на лінійній ділянці і можна вважати:

$$B(\tau)=\frac{a^2}{2}e^{-D\tau}\cos\omega_0\tau \qquad \textbf{(35)}$$

Тоді спектральна інтенсивність ЧМ коливання має вигляд лоренцівської кривої:

$$G(\omega)=\frac{a^2 D}{4\pi}\left(\frac{1}{D^2+\left(\omega-\omega_0\right)^2}+\frac{1}{D^2+\left(\omega+\omega_0\right)^2}\right) \qquad \textbf{(36)}$$

із характерною шириною спектра D=$G_0(0)$. Тоді відношення полос становить:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\approx D\tau_c<<1 \qquad \textbf{(37)}$$

Тобто, спектр ЧМ коливань набагато вужчий ніж спектр модуляції.

СТАТИСТИКА ПОШИРЕННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ ЛІНІЙ В ОПТИЦІ

Питання про поширення спектральних ліній є одно із фундаментальних в оптиці. Оскільки, як правило, вивчаються великі статистичні ансамблі часток, статистичні закономірності мають проявлятися і в спектрах випромінювання.

Відгук на електромагнітне поле в класичній фізиці описується із допомогою моделі гармонічного осцилятора. Згідно із моделлю індукований дипольний момент одного осцилятора:

$$p_i(t)=p_{0i}(t)\exp\left(-\alpha(t-t_i)\right)\cos\left(\omega(t-t_i)+\varphi_{0i}\right) \qquad \textbf{(38)}$$

де p_{0I}, t_i, φ_{0i} початкові амплітуда, момент часу та фаза окремого випромінювача. Якщо збудження осциляторів носить стохастичний характер, то всі ці величини випадкові. Отже сумарне поле, що пропорційне сумі всіх p_i теж випадкова функція часу. Якщо осцилятори ідентичні, то достатньо врахувати випадковість початкових моментів часу. Тоді, такий процес є не що інше як випадкова імпульсна послідовність – випадкове накладення імпульсів регулярної форми. Тоді, якщо «спалахи» незалежні, то як буде показано надалі спектр потужності випромінювання пропорційний спектру окремого осцилятора:

$$G(\omega)=2\pi\Omega\left|G_\omega\right|^2 \quad \left|G_\omega\right|^2=\frac{G_\omega(0)}{4\alpha^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2} \qquad \textbf{(39)}$$

де $|G|^2_\omega$ - спектр потужності одного окремого осцилятора, а Ω – середня частота слідування імпульсів. Ширина спектру, яку прийнято називати *природна ширина спектральної лінії*, становить $\Delta\omega=2\alpha$ і визначається процесами релаксації енергії окремого осцилятора.

Однак, в більшості випадків ширина контуру набагато більше. Пояснюється це тим, що внаслідок взаємодії осциляторів, їх власні частоти змінюються. Усереднений по ансамблю дипольний момент може обертатися на нуль за час набагато менший, ніж власний час життя одного осцилятора[1]. Отже, ширина контуру при цьому істотно збільшується.

Розглянемо простий і найбільш відомий механізм поширення ліній – доплеровський. Частота випромінювання осцилятора, що рухається зі швидкістю ***v*** визначається виразом:

$$\omega = \omega_0 + \vec{k}\vec{v} \qquad \textbf{(40)}$$

Оскільки значення швидкості величина випадкова, то випадковою є частота осцилятора. Таким чином інтегральний контур спектральної лінії є сума всіх лоренцівських контурів від окремих осциляторів, що випромінюють на частотах (40). Внаслідок ЦГТ слід очікувати, що результуючий контур буде гаусів.

Подамо світлове поле у напрямку спостереження ***v*** у вигляді:

$$E(t) = a \exp j(\omega_0 t + k\int_0^t v(\theta)d\theta) \qquad \textbf{(41)}$$

Неважко бачити, що світлове поле ЧМ процес, де модуляція гаусова. Кореляційна функція визначається корелятором:

$$\left\langle e^{j(\varphi-\varphi_\tau)} \right\rangle = \left\langle e^{jkr(t)} \right\rangle \quad r(t) = \int_t^{t+\tau} v(\theta)d\theta \qquad \textbf{(42)}$$

Будемо вважати газ доволі розрідженим, в тому сенсі, що за час вільного пробігу осцилятор встигає випромінювати квант світла. Тоді *r(t)=vτ* і:

$$\left\langle e^{jkr(t)} \right\rangle = e^{\frac{1}{2}k^2\sigma_v^2(\tau)} \approx e^{\frac{1}{4}k^2\sigma_{0v}^2\tau^2} \qquad \textbf{(43)}$$

[1] Величина обернена до $\Delta\omega$.

де σ^2_{0v} для максвелівського (а, отже, гаусового для одного напрямку) розподілу за швидкостям маємо:

$$\sigma^2_{0v} = \langle v^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m} \tag{44}$$

Отже згідно із (31) для кореляційної функції маємо:

$$B(\tau) = \frac{a^2}{2} e^{-k^2\sigma^2_{0v}\tau^2/4} \cos\omega_0\tau \tag{45}$$

а із (32) для спектру:

$$G^+(\omega) = \frac{a^2}{\Delta\omega_D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Delta\omega_D^2}} \tag{46}$$

де:

$$\Delta\omega_D = ku = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \tag{47}$$

доплеровська ширина спектральної лінії. Як видно вона визначає час кореляції світлового поля, який є в даному випадку середнім часом зміщення осцилятора на відстань порядку довжини хвилі. Якщо тиск газу збільшується, зіткнення обмежують вільні переміщення осциляторів. Тоді, τ_C збільшується і доплеровський контур звужується. Можна показати, що кореляційна функція тоді становить:

$$B(\tau) = \frac{a^2}{2} e^{-\Delta\omega_D^2\tau/2\nu_0} \cos\omega_0\tau \tag{48}$$

якій згідно із (35) та (36) відповідає лоренцівський спектр.

В проведених розрахунках не враховувалися процеси релаксації енергії. Проте оскільки процеси релаксації та ті, що пов`язані із хаотичним рухом осциляторів, статистично незалежні, результуючий спектр буде згорткою G_e та G_D. Зрозуміло, що якщо перший набагато вужчий[2] ніж другий, то домінуючу роль буде відігравати хаотичний рух.

---

[2] Як правило так буває на практиці.