

## МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ

### ВУЗЬКОСМУГОВИЙ СТАЦІОНАРНИЙ ШУМ

Стаціонарний випадковий процес називається *вузькосмуговим*, якщо його спектральна густина потужності зосереджена вузькій смузі частот біля деякої фіксованої частоти  $\omega_0$ . Якщо  $\Delta$  – ширина смуги спектру, то умова вузькосмуговості подається нерівністю  $\Delta \ll \omega_0$ . Тобто вузькосмуговий процес має реалізації, що нагадують синусоїду фіксованої частоти  $\omega_0$ . Близькість до синусоїди повинна мати місце впродовж значного числа періодів  $2\pi/\omega_0$ . Такий процес має нульове середнє значення.

Реалізація випадкового процесу в такому випадку записується як:

$$\xi(t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (1)$$

де амплітуда та фаза функції випадкові. Еквівалентний вигляд:

$$\xi(t) = a(t) \cos(\omega_0 t) - b(t) \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

де  $a$  та  $b$  називають *квадратурними компонентами*.

Сам процес, амплітуда, фаза та квадратурні компоненти стаціонарні випадкові функції часу. Не зменшуючи загальності вважаємо, що  $\langle \xi \rangle = 0$ . Тоді і  $\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$ .

Кореляційна функція  $B(\tau)$ :

$$\begin{aligned} B(\tau) = \overline{\xi \xi_\tau} &= \frac{1}{2} (\overline{aa_\tau} + \overline{bb_\tau}) \cos(\omega_0 \tau) + \frac{1}{2} (\overline{a_\tau b} - \overline{ab_\tau}) \sin(\omega_0 \tau) + \\ &+ \frac{1}{2} (\overline{aa_\tau} - \overline{bb_\tau}) \cos(\omega_0 (2t + \tau)) - \frac{1}{2} (\overline{a_\tau b} - \overline{ab_\tau}) \sin(\omega_0 (2t + \tau)) \end{aligned} \quad (3)$$

Із стаціонарності витікає, що (3) не залежить від часу, а, отже:

$$\overline{aa_\tau} = \overline{bb_\tau} = \sigma^2 p(\tau) \quad \overline{a_\tau b} = \overline{ab_\tau} = -\sigma^2 q(\tau) \quad \overline{a^2} = \overline{b^2} = \overline{\xi^2} = \sigma^2 \quad (4)$$

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos(\omega_0 \tau) - \sigma^2 q(\tau) \sin(\omega_0 \tau)$$

Тут,  $p(\tau)$  очевидно парна, а  $q(\tau)$  непарна функція  $\tau$ . З іншого боку кореляційну функцію  $B(\tau)$  внаслідок її парності можна визначити через спектр, по додатнім частотам, ввівши розстроювання  $\Omega = \omega - \omega_0$ :

$$B(\tau) = \int_0^{+\infty} G^+ \cos(\omega \tau) d\omega = \{\Omega = \omega - \omega_0\} = \cos(\omega_0 \tau) \int_{-\omega_0}^{+\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos(\Omega \tau) d\Omega - \sin(\omega_0 \tau) \int_{-\omega_0}^{+\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin(\Omega \tau) d\Omega \quad (5)$$

Порівнюючи два останніх вирази, отримаємо, що:

$$\sigma^2 p(\tau) = \int_{-\omega_0}^{+\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos(\Omega \tau) d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos(\Omega \tau) d\omega \quad (6)$$

$$\sigma^2 q(\tau) = \int_{-\omega_0}^{+\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin(\Omega \tau) d\omega \approx \int_{-\infty}^{+\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin(\Omega \tau) d\omega$$

Де врахована умова вузькосмуговості і в інтегралі нехтується малими величинами порядку  $\Delta/\omega_0$ . Із (4) видно, що кореляційна функція вузькосмугового випадкового процесу, спектр якого зосереджений у вузькій смузі біля частоти  $\omega_0$ , є функція, що осцилює (з частотою  $\omega_0$ ) з повільною спадаючою огинальною.

Із (6) явно видно, що функція  $q(\tau)$  непарна і  $q(0)=0$ . З урахуванням (4) квадратурні компоненти в співпадаючі моменти часу не корелюють. Якщо спектр  $G^+$  симетричний відносно частоти  $\omega_0$ , то, згідно із (6),  $q(\tau)=0$  для будь-якого  $\tau$  і:

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos(\omega_0 \tau) \quad (7)$$

В загальному випадку, застосувавши зворотне Фур'є-перетворення до кореляційної функції  $\sigma^2 p(\tau) = \langle aa_\tau \rangle = \langle bb_\tau \rangle$ , переконуємося, що спектр інтенсивності квадратурних компонент дорівнює симетричній відносно  $\omega_0$  частині спектра  $G^+$  процесу  $\xi$ :

$$G_a(\omega) = G_b(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} [G^+(\omega_0 - \omega) + G^+(\omega + \omega_0)] \quad (8)$$

Отже вигляд спектру квадратурних компонент суттєво залежить від вибору ялової частоти.

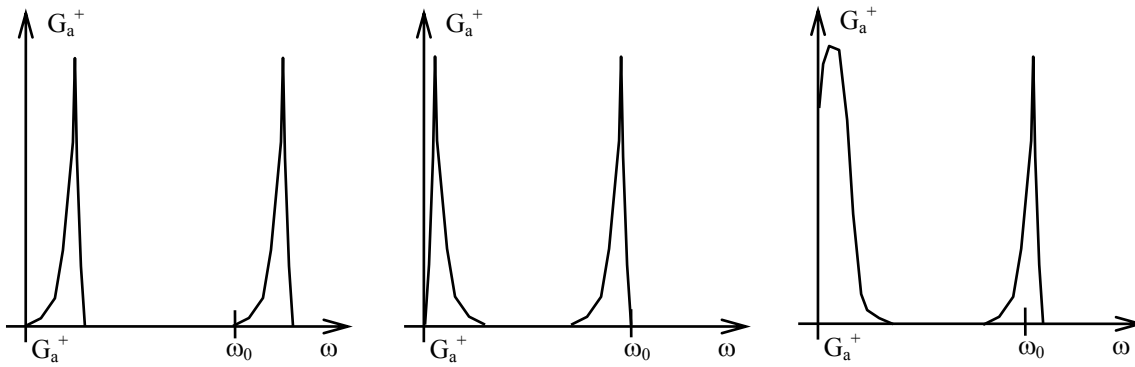


Рис. 1 Залежність форми спектру квадратурних компонент від вибору частоти  $\omega_0$

## ОГИНАЮЧА ТА ФАЗА ВУЗЬКОСМУГОВОГО ПРОЦЕСУ. ВУЗЬКОСМУГОВИЙ ГАУСІВ ШУМ

При деяких вельми загальних припущеннях можна за заданим випадковим стаціонарним процесу  $\xi(t)$  за допомогою перетворення Гільберта утворити новий, спряжений  $\eta(t)$ , стаціонарний випадковий процес:

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\vartheta)}{t - \vartheta} d\vartheta \quad (9)$$

Збіжність інтеграла тут в середньквдратичному сенсі. Тоді випадковий процес  $\xi(t)$  і йому спряжений можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A(t) \cos \Phi(t) & \eta(t) &= A(t) \sin \Phi(t) \\ A(t) &= \sqrt{\xi^2(t) + \eta^2(t)} & \Phi(t) &= \arctg \frac{\eta(t)}{\xi(t)} \end{aligned} \quad (10)$$

Визначені у такий спосіб випадкові процеси  $A(t)$  та  $\Phi(t)$  називають огиною та фазою випадкового процесу  $\xi(t)$ . Можливість подання випадкового процесу у вигляді (10) не накладає яких-небудь істотних обмежень на спектр процесу. Проте практичної цінності і наочності даного уявлення він набуває для вузькосмугових процесів.

Нехай  $\omega_0$  – деяка частота в смузі, де в основному зосереджений вузькосмуговий спектр випадкового процесу  $\xi(t)$ . Покладемо  $\Phi(t) = \omega_0 t - \varphi(t)$ . Підставляючи у (10), одержуємо подання вузькосмугового випадкового процесу у вигляді (2) із квадратурними компонентами:

$$\begin{aligned} a(t) &= A(t) \cos \varphi(t) & b(t) &= A(t) \sin \varphi(t) \\ A(t) &= \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} & \varphi(t) &= \arctg \frac{b(t)}{a(t)} \end{aligned} \quad (11)$$

Аналіз статистичних властивостей огиноюї та фази наочніше виконати коли квадратурні компоненти стаціонарні гаусовські процеси. Тоді звичайно і  $\xi(t)$  гаусів

процес. Вважаємо, що  $\langle \xi \rangle = \langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$ . Із ( 4 ) слідує, що  $\langle \xi^2 \rangle = \langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = \sigma^2$ . Відповідно їх одномірні розподіли ідентичні:

$$p(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}\right), \quad \zeta \in \{a, b, \xi\} \quad (12)$$

Оскільки між  $a$  та  $b$  згідно із ( 4 ) відсутня кореляція, їх двовимірний спільний розподіл є добуток одновимірних:

$$p(a, b) = p(a)p(b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13)$$

Перейшовши до полярних координат, знайдемо спільний розподіл амплітуди та фази квазігармонічного гаусового процесу:

$$p(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) = p(\varphi)p(\rho) \quad (14)$$

Так як і квадратурні компоненти, амплітуда та фаза статистично незалежні. Фаза рівномірно розподілена на інтервалі  $[0, 2\pi]$ , а амплітуда підкоряється розподілу Релея.

Інтенсивність вузькополосного процесу становить  $I = \rho^2/2$ , причому для середніх очевидно, що  $\langle I \rangle = \langle \rho^2/2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle = \sigma^2$ . Інтегруючи ( 14 ) по фазі та перейшовши до інтенсивності, переконаємося, що спектр інтенсивності вузькополосного гаусового процесу є експоненціальний:

$$p(I) = p(\rho = \sqrt{2I}) \left| \frac{\partial \rho}{\partial I} \right| = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (15)$$

Гаусів розподіл для квадратурних компонент ( 12 ), розподіл ( 14 ) для амплітуди (розподіл Релея) та для інтенсивності ( 15 ) наведено на Рис. 2.

Розглянемо тепер надзвичайно важливу для практики модель випадкового процесу, що є суперпозицією статистично незалежних регулярного сигналу (високочастотного детермінованого сигналу із частотою  $\omega_0$  промодульованого за амплітудою та фазою) та гаусового вузькосмугового процесу. Отже:

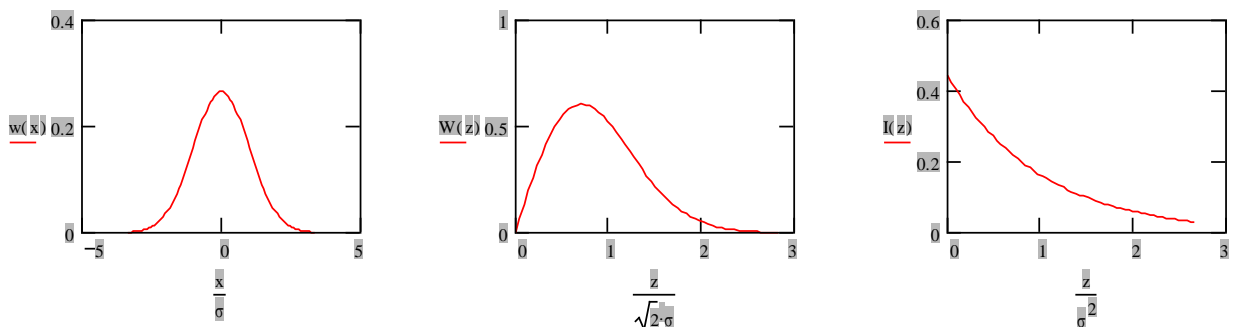


Рис. 2 Гаусів розподіл для квадратурних компонент ( 12 ), розподіл Релея ( 14 ) для амплітуди та розподіл інтенсивності ( 15 ) для вузькосмугового гаусового процесу

$$x(t) = S(t) + \xi(t) \quad (16)$$

де сигнал  $S(t)$  можна подати у вигляді:

$$S(t) = a_s(t) \cos(\omega_0 t) - b_s(t) \sin(\omega_0 t) = \rho_s \cos(\omega_0 t + \varphi_s(t)) \quad (17)$$

а шум у вигляді квазігармонійного гаусового процесу (1) або (2). Тоді (16) можна подати у вигляді:

$$x(t) = (a(t) + a_s(t)) \cos(\omega_0 t) - (b(t) + b_s(t)) \sin(\omega_0 t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (18)$$

$$\rho(t) = \sqrt{(a(t) + a_s(t))^2 + (b(t) + b_s(t))^2} \quad \varphi = \arctan \frac{a(t) + a_s(t)}{b(t) + b_s(t)}$$

Сумісний розподіл вірогідностей для квадратурних компонент має вигляд (13), тепер в якості аргументів виступають  $a+a_s$  та  $b+b_s$ . Переходячи до  $\rho$  та  $\varphi$  знаходимо сумісний розподіл:

$$p(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 - 2\rho\rho_s \cos(\varphi - \varphi_s) + \rho_s^2}{2\sigma^2}\right) \quad (19)$$

Як видно із (19) амплітуда та фаза не є тепер статистично незалежними величинами. Інтегруючи за  $\varphi$  та скориставшись виразом для нульової функції Бесселя уявного аргументу,

$$I_0\left(\frac{\rho\rho_s}{\sigma^2}\right) = J_0\left(j\frac{\rho\rho_s}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{\rho\rho_s}{\sigma^2} \cos \alpha} d\alpha \quad (20)$$

отримаємо розподіл для амплітуди:

$$p(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0\left(\frac{\rho\rho_s}{\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2 + \rho_s^2}{2\sigma^2}\right) \quad (21)$$

який залежить від відношення сигнал/шум, тобто відношенню усередненої інтенсивності сигналу до інтенсивності (дисперсії) шуму:

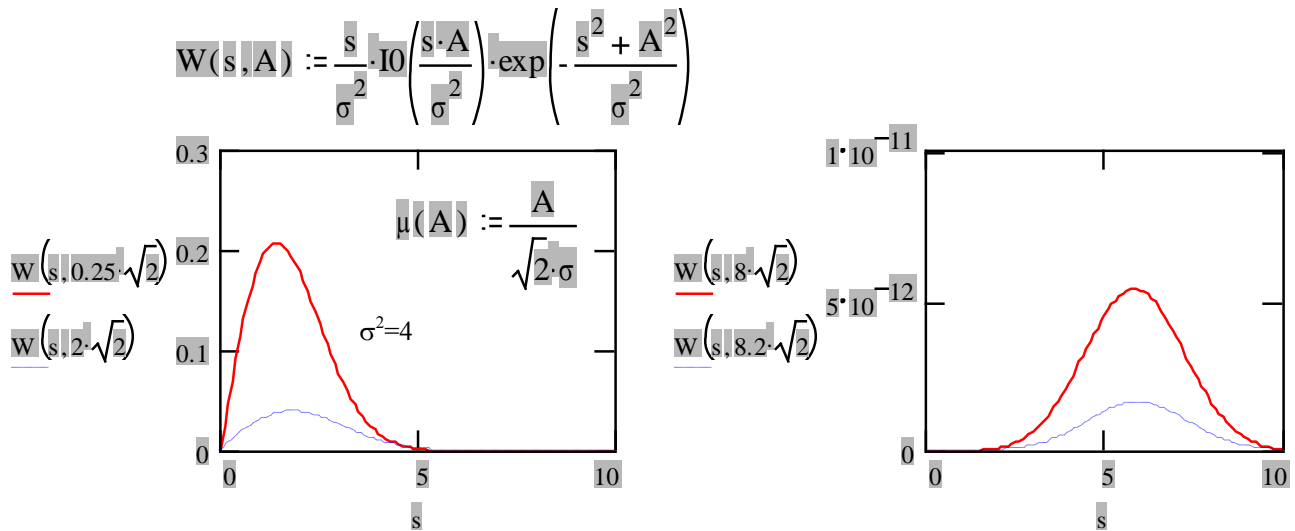
$$\mu^2 = \frac{\rho_s^2}{2\sigma^2} \quad (22)$$

За малих значень відношення сигнал/шум функція Бесселя (20) набуде значення одиниця, а розподіл (21) переходить в Релеєвський розподіл, що відповідає тільки наявності шуму. За великих значень  $\mu^2$ , можна скористатися асимптотою функції Бесселя  $I_0(z) \approx e^z / (2\pi)^{1/2}$ . Тоді (21) переходить в:

$$p(\rho) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\rho_s - \rho)^2}{2\sigma^2}\right) \rightarrow \delta(\rho - \rho_s) \quad (23)$$

Інтегруючи (19) по  $\rho$  отримаємо розподіл для фази:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\mu^2) \{1 + \sqrt{\pi} z \exp(-z^2) [1 + \Phi(z)]\}, \quad z = \mu \cos(\varphi - \varphi_0) \quad (24)$$



Мал. 3

де  $\Phi$  – інтеграл помилок. Відповідно, за малих значень відношення сигнал шум фаза розподілена рівномірно, а за великих розподіл (24) переходить в  $\delta(\varphi - \varphi_0)$ . На Мал. 3 наведено розподіл вірогідностей для амплітуди суперпозиції шуму та сигналу.

## НЕГАУСІВ КВАЗІГАРМОНІЙНИЙ ПРОЦЕС. УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ РІВНОМІРНОГО РОЗПОДІЛУ ФАЗИ

Як зміниться статистика для амплітуди та фази для негаусового процесу? Питання має не тільки методичний характер, а і практичний, оскільки з негаусовими процесами зустрічаємося в нелінійних системах. Розглянемо процес виду (24), та не з гаусовим розподілом вірогідностей. Однак, вважаємо, процес стаціонарним. Запишемо характеристичну функцію процесу:

$$\Theta(u) = \langle \exp(ju\xi) \rangle = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(ju\rho \cos(\omega_0 t + \varphi)) p(\rho, \varphi) \quad (25)$$

Оскільки, значення фази лежить в інтервалі  $[0, 2\pi]$ , розподіл  $p(\rho, \varphi)$  можна подати у вигляді ряду Фур'є:

$$p(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \exp(jn\varphi) \quad (26)$$

Аналогічним чином можна подати другий підінтегральний член в (25):

$$\exp(ju\rho \cos(\omega_0 t + \varphi)) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} j^m J_m(u\rho) \exp(jm(\omega_0 t + \varphi)) \quad (27)$$

Підставляючи (26) та (27) в (25) та інтегруючи по  $\varphi$  отримаємо:

$$\Theta(u) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} j^n \exp(jn\omega_0 t) \int_0^\infty d\rho V_n(\rho) J_n(u\rho) \quad (28)$$

Оскільки процес, що розглядається стаціонарний, залежність від часу має бути відсутня. Отже, в ряді ( 26 ) залишається тільки один член:

$$p(\rho, \varphi) = V_0(\rho) \quad (29)$$

Незалежність від фази спільного розподілу означає, з урахуванням умови нормування, що для будь-якого стаціонарного вузькосмугового процесу розподіл фази має вигляд  $p(\varphi) = 1/2\pi$ .

Вираз ( 28 ) тепер можна подати у вигляді:

$$\Theta(u) = \int_0^\infty p(\rho) J_0(u\rho) d\rho \quad (30)$$

Зауважимо, що вираз ( 30 ) є перетворенням Ганкеля. Використовуючи зворотне перетворення, отримаємо співвідношення яке дозволяє за відомою характеристичною функцією знайти вираз для розподілу амплітуд:

$$p(\rho) = \rho \int_0^\infty \Theta(u) J_0(u\rho) du \quad (31)$$

Із статистичної незалежності фази та амплітуди також витікає, що для моментів:

$$\langle \xi^{2n+1} \rangle = \langle \rho^{2n+1} \rangle \langle \cos^{2n+1}(\omega_0 t + \varphi) \rangle = \langle \rho^{2n+1} \rangle \langle \cos^{2n+1}(\varphi) \rangle = 0 \quad (32)$$

$$\langle \xi^{2n} \rangle = \langle \rho^{2n} \rangle \langle \cos^{2n}(\varphi) \rangle = \langle \rho^{2n+1} \rangle \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

Зокрема, із рівності парних моментів нулю слідує, що крива розподілу  $p(\xi)$  симетрична:

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Theta(u) \cos(u\xi) du = p(-\xi) \quad (33)$$

Нарешті, перетворюючи за звичайними правилами розподіл  $p(\xi)$  до нових змінних  $\xi = \cos \psi$ ,  $\eta = \sin \psi$  ( $\psi = \omega t + \varphi$ ), отримаємо:

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\eta \frac{p(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|}^\infty d\rho \frac{p(\rho)}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} \quad (34)$$

## АМПЛІТУДНА МОДУЛЯЦІЯ

Поставимо тепер питання протилежним чином. Як по заданим статистичним характеристикам розподілу амплітуди та фази знайти статистичні характеристики, зокрема спектр випадкового процесу  $\xi$ , що описується виразом ( 1 ). Розглянемо спершу *амплітудну модуляцію*:

$$\xi(t) = a(1 + \eta(t)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (35)$$

Вважаємо розподіл фаз рівномірним, а  $\eta(t)$  стаціонарним випадковим процесом, таким що:

$$\bar{\eta} = 0, \quad \overline{\eta\eta_\tau} = B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (36)$$

Тоді, знаходимо:

$$\bar{\xi} = 0, \quad \overline{\xi\xi_\tau} = B(\tau) = \frac{a^2}{2} (1 + \eta\eta_\tau) \cos(\omega\tau) \quad (37)$$

Скориставшись теоремою Вінера-Хічина із (37) знаходимо спектр процесу:

$$G(\omega) = \frac{a^2}{4} (\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega) + G_0(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 + \omega)) \quad (38)$$

Відповідний спектр по додатнім частотам:

$$G^+(\omega) = \frac{a^2}{2} (\delta(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 - \omega)) \quad (39)$$

зручно подати відносно ялової частоти  $\omega_0$ :

$$G^+(\omega + \Omega) = G^+(\omega - \Omega) = \frac{a^2}{2} (\delta(\Omega) + G_0(\Omega)) \quad (40)$$

Спектр має дві компоненти – дискретну на яловій частоті, що відповідає гармонічній складові сигналу, та неперервну, що відповідає спектру модуляції.

Одновимірний розподіл та характеристична функція визначаються за формулами (34) та (30), відповідно.

## ФАЗОВА МОДУЛЯЦІЯ

Розглянемо тепер квазігармонійне коливання із випадковою фазою:

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \frac{1}{2} a \exp(j(\omega t + \varphi)) + \text{к.с.} \quad (41)$$

де  $\varphi$  стаціонарний гаусівський процес:

$$\bar{\varphi} = 0, \quad \overline{\varphi\varphi_\tau} = B_0(\tau) \equiv \sigma_0^2 R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (42)$$

Розрахунки середнього  $\langle x \rangle$  та кореляційної функції  $\langle x x_\tau \rangle$  зводяться до розрахунку середніх типу  $\langle \exp(j\varphi) \rangle$  та  $\langle \exp(j(\varphi \pm \varphi_\tau)) \rangle$ . З урахуванням того, що  $\varphi$  гаусівський процес знаходимо, що:

$$\langle e^{j\varphi} \rangle = e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}}, \quad \langle e^{j(\varphi \pm \varphi_\tau)} \rangle = e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}(1 \pm R(\tau))} \quad (43)$$

Усереднюючи (41) отримаємо:

$$\bar{x} = a e^{-\frac{\sigma_0^2}{2}} \cos \omega_0 t, \quad \overline{x^2} = \frac{a^2}{2} [1 + e^{-\sigma_0^2} \cos \omega_0 t] \quad (44)$$



Для флуктуаційної компоненти  $\xi(t)=x(t)-\langle x(t) \rangle$  фазово-модульованого коливання ФМ знаходимо:

$$B(t, \tau) = \overline{\xi \xi_\tau} = \frac{a^2}{2} e^{-\sigma_0^2} [e^{B_0(\tau)} - 1] [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)] \quad (45)$$

Із ( 45 ) видно, що в даному випадку ФМ не є стаціонарним процесом, оскільки статистичні характеристики є функції часу. Однак, оскільки практично вимірюються усереднені по часу характеристики, то для середніх по часу маємо:

$$\tilde{B}(\tau) = \overline{\xi \xi_\tau} = \frac{a^2}{2} e^{-\sigma_0^2} [e^{B_0(\tau)} - 1] \cos \omega_0 \tau \quad (46)$$

Спектр ФМ коливання модульованого стаціонарним шумом утворений із дискретної лінії на яловій частоті із інтенсивності, що відповідає ( 44 ):

$$\tilde{I}_r = \frac{a^2}{2} e^{-\sigma_0^2} \quad (47)$$

та неперервного спектра флуктуацій:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{a^2}{4\pi} e^{-\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{B_0(\tau)} - 1] \cos \omega_0 \tau e^{-j\omega \tau} d\tau \quad (48)$$

якому відповідає інтегральна інтенсивність:

$$\tilde{I}_f = \frac{a^2}{2} [1 - e^{-\sigma_0^2}] \quad (49)$$

Зауважимо, що сума інтенсивностей регулярної ( 47 ) та флуктуаційної ( 49 ) компоненти дорівнює інтенсивності немодульованого коливання. Це, власне наслідок не гаусовості – закон збереження інтенсивності має виконуватися за будь-якої статистики.

Оскільки залежність  $x$  від  $\varphi$  істотно нелінійна, то і форма спектру флуктуацій для ФМ коливань в загальному випадку істотно відрізняється від спектру моделюючого шуму. Виключення становить випадок слабкої модуляції, коли  $\sigma^2_0 \ll 1$ . Тоді і  $|B(\tau)| \ll 1$ . Вираз ( 48 ) набуває тоді вигляду:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{a^2}{8\pi} e^{-\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_0(\tau) (e^{-j(\omega-\omega_0)\tau} + e^{-j(\omega+\omega_0)\tau}) d\tau = \frac{a^2}{4} (G_0(\omega - \omega_0) + G_0(\omega + \omega_0)) \quad (50)$$

Як видно із ( 50 ) спектр флуктуацій повторює спектр фазової модуляції. Останнє можна, власне, отримати лінеаризувавши ( 41 ) за малим змінам фази. Тоді наближено:

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \approx a \cos(\omega_0 t) \underbrace{\cos(\varphi(t))}_{\approx 1 - \varphi^2/2} - a \sin(\omega_0 t) \underbrace{\sin(\varphi(t))}_{\approx \varphi} \approx \\ &\approx a \cos(\omega_0 t) - a \sin(\omega_0 t) \varphi \end{aligned} \quad (51)$$

задача зводиться до амплітудної модуляції з відповідними наслідками.

В протилежному випадку глибокої фазової модуляції  $\sigma^2_0 \gg 1$  можна знехтувати одиницею в порівнянні із експонентою. Окрім того, якщо ширина спектра флуктуації доволі велика, то можна вважати, що:

$$e^{B_0(\tau)} - 1 \approx e^{\sigma_0^2[1-\alpha^2\tau^2/2]} \Rightarrow \tilde{G}(\omega) = \frac{a^2}{4\alpha\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\alpha^2\sigma_0^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{2\alpha^2\sigma_0^2}} \right) \quad (52)$$

Тобто спектр ФМ коливань має гаусів вигляд незалежно від форми спектру фазової модуляції. Зауважимо, що ширина ФМ спектру набагато більше ніж ширина спектру флуктуацій. Дійсно,  $\Delta\omega_0 \sim \alpha$ ,  $\Delta\omega \sim \alpha\sigma_0$ ,  $\Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim \sigma \gg 1$ . В іншому випадку експоненційного спадання функції кореляції, форма спектру буде лоренцівською:

$$e^{B_0(\tau)} - 1 \approx e^{\sigma_0^2[1-\alpha\tau]} \Rightarrow \tilde{G}(\omega) = \frac{a^2\alpha\sigma_0^2}{4\pi} \left( \frac{1}{\alpha^2\sigma_0^4 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2\sigma_0^4 + (\omega + \omega_0)^2} \right) \quad (53)$$

В цьому випадку розширення ФМ спектру ще більше:  $\Delta\omega_0 \sim \alpha$ ,  $\Delta\omega \sim \alpha\sigma_0^2$ ,  $\Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim \sigma^2_0 \gg 1$