

МЕТОДИ ТЕОРІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ В ФІЗИЦІ КОЛИВАНЬ ТА ХВИЛЬ

ДЕТЕРМІНОВАНЕ ТА СТОХАСТИЧНЕ ОПИСАННЯ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Статистичний характер задач, якими займається статистична радіофізика та оптика, потребує дещо іншого математичного апарату, ніж при описанні детермінованих явищ. З точки зору фізика-теоретика, отримати детермінований розв'язок деякого рівняння руху $L(x)=0$ при заданих початкових та/або граничних умовах, означає отримати залежність від часу змінної $x=f(t)$. З точки зору експериментатора, результат (*подія*) експерименту, що проводиться при всіх однакових умовах для детермінованого явища завжди буде однаковим. Між тим існує безліч процесів, для яких, навіть при точно відомих рівняннях руху, результати експериментів або *випробувань* мають випадковий характер. Повторюючи раз за разом один і той самий експеримент (виконуючи випробування) експериментатор буде отримувати різні результати. В теорії імовірності кажуть, що результатом кожного випробування є деяка *подія*. Хвилі на поверхні моря, броунівський рух частинки, напруга на

резисторі та ін. – типові приклади процесів, які, вочевидь, не піддаються детермінованому опису. В такому випадку стає зручним статистичний опис явищ в основі якого лежить припущення, що для події A (наприклад, при вимірі миттєвого значення напруги на резисторі значення останньої буде $U < 0.0025V$) існує кінцева границя відношення:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \quad (1.1)$$

де n – кількість випадків, за яких спостерігалось така подія, N - загальна кількість вимірів (випробувань). Іноді (1.1) називають визначенням імовірності. Не кажучи вже про нереальність експериментальної перевірки (1.1), довести, що така границя існує теоретично нема ніякої можливості. Тому в теорії ймовірності, *ймовірність* визначають наступними аксіомами, вперше сформульованими А.Н. Колмогоровим. Нехай Ω – простір елементарних подій. Імовірність і її властивості визначаються наступними аксіомами.

1. Кожній події відповідає дійсне число $P(A)$ таке, що $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Для достовірної події S , $P(S)=1$. Або в еквівалентній формі $P(\Omega)=1$ ймовірність отримати хоч-якийсь результат із всіх можливих дорівнює 1.
3. Для двох взаємовиключних подій, ймовірність, що станеться одне з них $P(A_1 \vee A_2) = P(A_1) + P(A_2)$.

ВИПАДКОВІ ЗМІННІ. ІМОВІРНІСТЬ. РОЗПОДІЛ ІМОВІРНOSTІ

Випадкова величина характеризується тим, що відома не точна її величина, а лише способи її отримання при фізично визначених, фіксованих і сталих умовах випробувань. При кожному конкретному випробуванні вона набуває цілком конкретне значення, яке будемо називати реалізацією. Повторюючи дослід, отримаємо сукупність реалізацій, що називають *статистичний ансамбль*. Цей масив можна піддати статистичній обробці і знайти статистичні характеристики випадкової величини, визначивши міру її імовірності. Зручно ввести поняття *випадкова змінна*, як змінної U , що включає набір всіх можливих значень $u(A)$ разом з їх мірою імовірності. Тоді,

імовірність $\Pr(U < u)$ того, що змінна U не набуде в результаті виміру значення більше, ніж деяке u може бути виражена через *функцію розподілу імовірності*:

$$F_U(u) = \Pr(U < u) \Rightarrow \Pr(a < U \leq b) = F_U(b) - F_U(a) \quad (1.2)$$

З (1.2) зручно ввести поняття *густини розподілу імовірності*:

$$p_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) \quad (1.3)$$

Звідки витікає, що величина $p_U(u)du$ дає значення імовірності, що змінна U набуває значення в інтервалі $(u, u+du)$. Згідно із другою аксіомою, густина імовірності нормується на одиницю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_U(u) du = 1 \quad (1.4)$$

У випадку, якщо випадкова змінна набуває дискретні значення густина розподілу може бути описано з допомогою δ -функції Дірака:

$$p_U(u) = \sum_{k=1}^{\infty} P(u_k) \delta(u - u_k) \quad (1.5)$$

На Рис. 1 наведені функція розподілу та густина розподілу імовірності для випадків так званого нормального розподілу та дискретної змінної, що описує експеримент подвійного кидання монети.

БАГАТОВИМІРНІ СТАТИСТИЧНІ ПРОЦЕСИ. СТАТИСТИЧНА НЕЗАЛЕЖНІСТЬ

Аналогічним чином можна описувати сумісні події, наприклад, коли істотно знати імовірність випадання пари подій. Тоді кожній реалізації події (експерименту) A припишемо значення $u(A)$, а реалізаціям події (експерименту) B , відповідно $v(B)$. Тоді *сумісна функція розподілу*:

$$F_{UV}(u, v) = \Pr(U \leq u, V \leq v) \quad (1.6)$$

Сумісна густина розподілу:

$$p_{UV}(u, v) = \frac{d^2}{dudv} F_{UV}(u, v) \quad (1.7)$$

з відповідною умовою нормування.

Вводиться також поняття *маргінальна імовірність* та *маргінальна густини імовірності*, як густина розподілу однієї випадкової змінної, коли значення другої неістотне:

$$p_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u, v) du \quad p_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{UV}(u, v) dv \quad (1.8)$$

Часто використовується і поняття *умовна імовірність* $P(B/A)$, тобто імовірність спостерігати подію B , якщо відомо, що A вже спостерігалось. Відповідно, *густина умовної імовірності*, сумісна імовірність та імовірність події $A(B)$ пов'язані співвідношенням, що називається *формула Байєса*:

$$p_{U|V}(u|v)p_V(v) = p_{UV}(u, v) \quad p_{V|U}(v|u)p_U(u) = p_{UV}(u, v) \quad (1.9)$$

Тепер зручно ввести поняття *статистична незалежність*. Дві випадкові змінні називаються статистично незалежними, якщо значення однієї не впливає на імовірність значення другої. Звідси безпосередньо випливає, що в такому випадку:

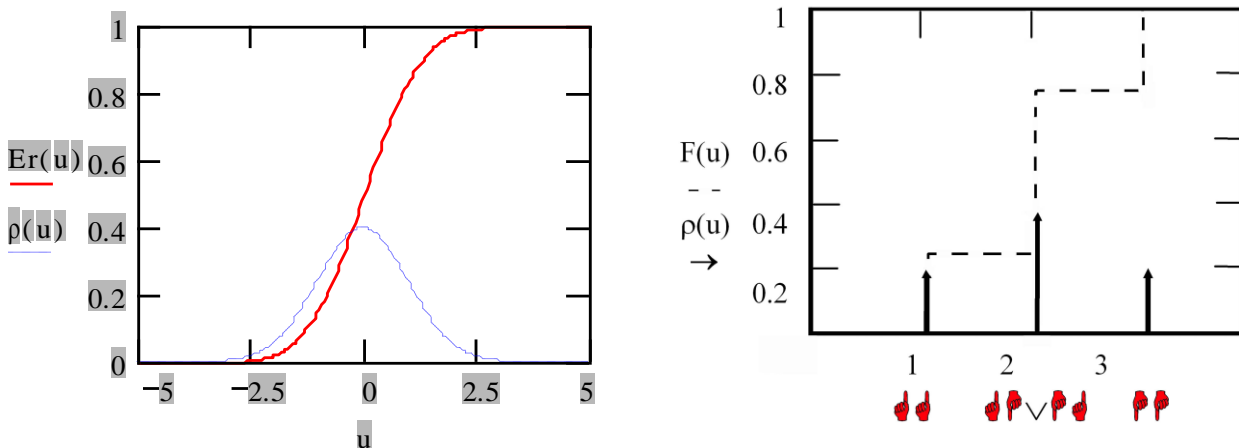


Рис. 1 Неперервна (нормальний розподіл) та дискретна функції розподілу імовірності та її густини для подвійного кидання монети, спінової орієнтації тощо.

$$p_{U|V}(u|v) = p_U(u) \quad p_{UV}(u,v) = p_{U|V}(u|v)p_V(v) = p_U(u)p_V(v) \quad (1.10)$$

Отже, сумісна густина розподілу для статистично незалежних змінних дорівнює добутку маргінальних.

СТАТИСТИЧНИЙ АНСАМБЛЬ. УСЕРЕДНЕННЯ. МОМЕНТИ. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ. КУМУЛЯНТИ

Припустимо, що в N різних лабораторіях на однакових установках та за однакових умов проводиться один експеримент (вимірюється напруга на резисторі, вивчається рух броунівської частинки тощо). Результатом цієї діяльності буде N різних реалізацій випробувань. Сукупність всіх можливих реалізацій називають *статистичним ансамблем*. Чим більше кількість реалізацій, тим більше достовірної інформації можна отримати із цих експериментів. А власне яка інформація може вважатися корисною? Інтуїтивно зрозуміло, що корисною, достовірною інформацією може бути тільки така інформація (данні), що повториться з певною незначною похибкою при повторних експериментах. Якщо спостерігати довгі серії результатів експерименту, то виявляється наступна закономірність: окремі результати можуть відрізнятися один від одного, але середні значення, що відносяться до серій результатів, залишаються постійними, проявляють *статистичну стійкість*. Передбачається, що апіорі (до здійснення експерименту) відоме безліч можливих результатів експерименту. Якщо статистичний ансамбль має значну кількість реалізацій, можна сподіватися, що існують відношення типу (1.1) і значення їх будуть повторюватися раз від разу. Отже, з експериментів можна визначити густину ймовірностей випадкових змінних, якими характеризується експеримент. З допомогою її можна визначити похідні, інтеграли, функціональні залежності тощо.

Розглянемо для прикладу, як з допомогою функції $p_U(u)$ можна знайти середнє значення випадкової змінної. В виразі для середнього:

$$\bar{u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^N u_k(t)}{N} \quad (1.11)$$

підсумуємо по M інтервалам $u_n \leq u_n \leq u_n + \Delta u$. Тоді, після нескладних перетворень отримаємо:

$$\langle u \rangle = \bar{u} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^N u_k(t)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^M u_n(t) N_n}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^M u_n(t) \frac{N_n}{\Delta u N} \Delta u \approx \int_{-\infty}^{\infty} u p_U(u) du \quad (1.12)$$

В (1.12) підсумовування за реалізаціям змінено на підсумовування по інтервалам, де N_n кількість реалізацій в n -тому інтервалі. Враховано також визначення густини імовірності (1.3).

Метод визначення середнього (1.12) дозволяє узагальнити процедуру усереднення для будь-якої функції $g(u)$ від випадкової змінної. Оскільки імовірність набування випадковою змінною деякого значення U в точності визначає імовірність набути функцією $g(u)$ значення $g(U)$, маємо:

$$\langle g(u) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) p_U(u) du \quad (1.13)$$

Простішими і, водночас, найважливішими середніми характеристиками випадкової змінної є *моменти*:

$$\langle u^n \rangle = m_n = \int_{-\infty}^{\infty} u^n p_U(u) du, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.14)$$

серед яких особливо важливі перший (середнє значення) та другий (середньоквадратичне значення).

Оскільки часто найбільший інтерес становлять саме флуктуації випадкових процесів, зручно ввести *центральні моменти* μ_n , що визначаються підстановкою в (1.13) $g(u) = (u - \langle u \rangle)^n$. Особливу роль відіграє другий центральний момент, або *дисперсія*:

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \bar{u})^2 p_U(u) du \quad (1.15)$$

Спеціальне значення має також середнє від експоненти, або *характеристична функція*, яка ще може трактуватися як Фур'є-образ від густини розподілу ймовірностей:

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j\omega u\} p_U(u) du \quad (1.16)$$

Зворотнім перетворенням Фур'є завжди можна знайти густину імовірності, якщо відома характеристична функція. В деяких випадках працювати з характеристичними функціями зручніше. Покажемо, наприклад, що сумарна густина ймовірностей випадкової змінної Z , що дорівнює сумі двох статистично незалежних змінних $U+V$, становить:

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_U(z-v) p_V(v) dv = p_U * p_V \quad (1.17)$$

Дійсно, оскільки U та V статистично незалежні, то:

$$\begin{aligned} \Theta_Z(\omega) &= \iint e^{j\omega(u+v)} p_{UV}(u, v) du dv = \\ &= \iint e^{j\omega(u+v)} p_U(u) p_V(v) du dv = \Theta_U(\omega) \cdot \Theta_V(\omega) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Звідки, згадавши, що характеристична функція є Фур'є образ густини ймовірностей, отримаємо (1.17).

Характеристична функція, густина імовірності та статистичне середнє (1.13) можна подати у вигляді ряду по моментам. Розвиваючи в ряд експоненту в підінтегральному виразі (1.16), та враховуючи визначення моментів (1.14), отримаємо для характеристичної функції:

$$\Theta(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} u^n p_U(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^n}{n!} m_n \quad (1.19)$$

Звідси видно, що:

$$m_n = \frac{1}{j^n} \left(\frac{d}{d\omega} \right)^n \Theta(\omega) \Big|_{\omega=0} \quad (1.20)$$

Застосувавши зворотнє перетворення Фур'є до характеристичної функції (1.19), отримаємо густини імовірності:

$$p_U(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^n \exp\{-j\omega u\} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} m_n \left(\frac{d}{du}\right)^n \delta(u) \quad (1.21)$$

Тут враховано властивості δ -функції Дірака та її похідних. Підставляючи (1.21) в (1.13) та інтегруючи отримаємо для статистичного середнього:

$$\langle g(u) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \left(\frac{d}{du}\right)^n g(u) \Big|_{u=0} \quad (1.22)$$

Таким чином, роль моментів при статистичному описі аналогічна ролі похідних в аналізі. Чим більше похідних відомо, тим детальніше можна описати детерміновану функцію в околі деякої точки. Аналогічно, чим більше відомо моментів випадкової змінної, тим детальніше може бути описана густина ймовірностей.

Використовуючи розклад в ряд логарифму:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (1.23)$$

та вважаючи, що $\Theta(\omega) = 1 + x(\omega)$, отримаємо:

$$\ln \Theta(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\Theta(\omega) - 1)^n}{n} \quad (1.24)$$

Підставляючи сюди (1.19) та збираючи члени одного порядку по ω , отримаємо:

$$\ln \Theta(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(j\omega)^n}{n!} k_n \quad (1.25)$$

де коефіцієнти k_n називаються кумулянтами. k_n виражається через моменти n -го порядку включно. Так:

$$k_1 = m_1 \quad k_2 = \mu_2 = \sigma^2 \quad k_3 = m_3 \quad k_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 \quad (1.26)$$

З допомогою моментів густина ймовірностей виражається через δ -функції та їх похідні. Натомість з допомогою кумулянтів вона визначається без будь-яких сингулярностей. Так, якщо відмінні від нуля тільки два перших кумулянти (відповідно і моменти), то згідно із (1.25):

$$\Theta(\omega) = \exp(j\omega m_1 - \frac{1}{2} \omega^2 \sigma^2) \quad (1.27)$$

Після зворотного Фур'є перетворення отримаємо густину ймовірностей:

$$p_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(u - m_1)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.28)$$

що називається *гаусів розподіл*. Старші кумулянти дають кількісну оцінку відхилення довільної функції розподілу від гаусової. Величину $k = \kappa_3 / \sqrt{\kappa_2^3} = \mu_3 / \sigma^3$ називають *коефіцієнтом асиметрії*. В першому наближенні він характеризує асиметрію розподілу. Коефіцієнт $\gamma = \mu_4 / \mu_2^2 - 3$ коефіцієнтом ексцеса, що характеризує крутизну розподілу. В більшості випадків істотне значення мають тільки перші декілька моментів чи кумулянтів, як правило перші два. Ця обставина ґрунтується на фундаментальній теоремі теорії ймовірностей – центральній граничній теоремі.

ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Під назвою «центральна гранична теорема» в теорії ймовірностей виступає ціла низка теорем різного степеню загальності. Проте всі вони стосуються одного питання – граничного розподілу суми незалежних випадкових величин при необмеженому збільшенні числа складових. З'ясовується, що така границя існує і має унікальні властивості. Сформулюємо ЦГТ у вигляді корисного для фізика. Сума статистично незалежних випадкових складових із середніми $\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$, $\langle u_3 \rangle$, ..., $\langle u_n \rangle$, та дисперсіями σ_1^2 , σ_2^2 , σ_3^2 , ..., σ_n^2 , з довільними законами розподілу, при необмеженому збільшенні числа складових, розподілена за гаусовим законом із середнім та дисперсією, що дорівнює сумі середніх та дисперсій, відповідно. Звичайно, виникає питання про умови виконання ЦГТ. Не вдаючись в математичні подробиці, суть цих умов можна сформулювати так – кожна складова має давати лише незначний вклад в суму, або, ні одна із складових не повинна домінувати. Тобто, жодне із середніх або дисперсій не має бути набагато більше інших.

Проведемо нестрогий доказ цієї теореми. Нехай Y є сума $Y=U_1+U_2+...U_n$ із середніми та дисперсіями наведеними вище та характеристичними функціями $\Theta_\alpha(u_\alpha)$ ($\alpha=1,2,...n$). Характеристична функція суми може бути записана у вигляді:

$$\Theta_Z(\omega) = \langle \exp \{ j\omega(u_1 + u_2 + ...u_n) \} \rangle = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(j\omega)^m}{m!} k_m, \quad (1.29)$$

$$\text{де } k_m = \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha,m}$$

де використовується властивості кумулянтів – кумулянт суми дорівнює сумі кумулянтів одного порядку незалежних випадкових величин. Перенормуємо тепер кумулянти на дисперсію:

$$k_{\alpha,m} = \sigma_\alpha^m \lambda_{\alpha,m}, k_m = \sigma^m \lambda_m, \quad \text{де } \sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha^2 \quad (1.30)$$

Тоді характеристичну функцію (1.29) можна переписати у вигляді:

$$\Theta_Z(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(j\omega\sigma)^m}{m!} \lambda_m \quad (1.31)$$

де із (1.30) безпосередньо витікає, що для нормованого кумулянта m -го порядку:

$$\lambda_m = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha^m \lambda_{\alpha,m}}{\left(\sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha^2 \right)^{m/2}} \quad (1.32)$$

чисельник зростає як n , а знаменник як $n^{m/2}$. Таким чином, в границі відносна роль кумулянтів старших порядків ($m \geq 3$) падає із зростанням n до нуля.

$$\lambda_m \approx \frac{1}{n^{m/2-1}} \quad (1.33)$$

Тому в границі вигляд характеристичної функції (1.29) буде:

$$\Theta_Z(\omega) = \exp \left(j\omega k_1 - \frac{1}{2} \omega^2 k_2 \right) \quad (1.34)$$

Застосувавши зворотне перетворення Фур'є отримаємо граничний розподіл:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2}} \exp\left(-\frac{(y - k_1)^2}{2k_2}\right), \quad (1.35)$$

$$\text{де } k_1 = \langle y \rangle = \sum_{\alpha=1}^n \langle u_{\alpha} \rangle, \quad k_2 = \sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_{\alpha}^2$$

який, як неважко бачити, є гаусів.

Звичайно, слід бути обережними в конкретних випадках, оскільки при кінцевій кількості складових асимптотичне наближення (1.35) може бути некоректним. Все залежить від того наскільки значне n , та як далеко від «хвостів функції» ми збираємося працювати. Однак, в більшості фізичних випадках густина імовірності є гаусовою. Цим визначається фундаментальне значення ЦГТ.

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ. СТАЦІОНАРНІСТЬ. СТАТИСТИЧНЕ УСЕРЕДНЕННЯ ТА УСЕРЕДНЕННЯ В ЧАСІ. ЕРГОДИЧНІСТЬ

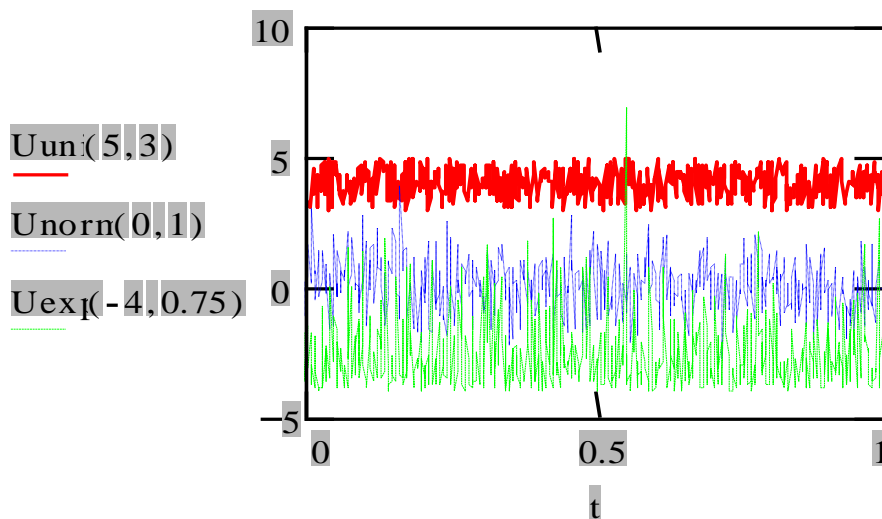


Рис. 2 Приклади випадкових процесів. Зверху вниз розподілені: рівномірно, нормально, експоненційно.

Якщо кожній випадковій події співставити дійсну функцію $u(A,t)$ незалежної змінної (або змінних), то сукупність можливих вибірових функцій разом із мірою їх імовірності називають *випадковий процес*. Наприклад, картина хвиль на воді від падаючого дощу, чи шум напівпровідникового приладу. Зрозуміло, що для повного визначення випадкового процесу необхідно провести безліч експериментів і, відповідно, безліч часу. Однак,

такий опис не обов'язковий, більше того, не завжди бажаний. В деяких задачах достатньо розглянути густину розподілу першого порядку $p_U(u, t_1)$ при фіксованому параметрі t_1 . Частіше все ж необхідно розглядати густину розподілу другого порядку – сумісний розподіл при фіксованих значеннях t_1 та t_2 . Таким чином можна визначити сумісні моменти, які в загальному випадку є функціями t_1 та t_2 . На Рис. 2 наведено ансамбль вибірових функцій та моменти часу, за яких визначається густина розподілу першого та другого порядку.

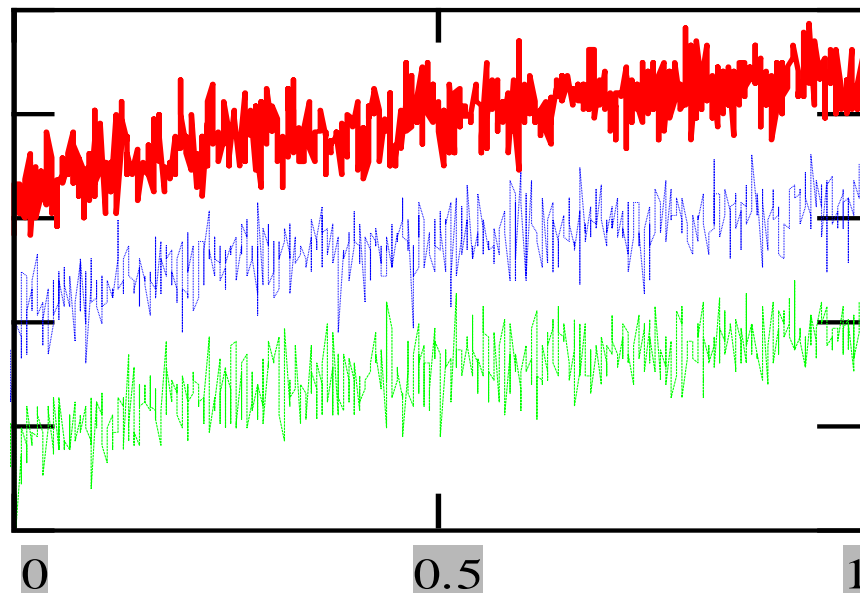


Рис. 3 Приклад нестационарного та неергодичного випадкового процесу. Три послідовні реалізації.

Для фізичних задач непересічне значення мають так звані стаціонарні процеси. Процес називають *строго стаціонарний процес*, якщо сумісна функція розподілу k -го порядку не залежить від початку відліку для будь-якого k . Математично:

$$p_U(u_1, u_2, \dots, u_k, t_1, t_2, \dots, t_k) = p_U(u_1, u_2, \dots, u_k, t_1 - T, t_2 - T, \dots, t_k - T) \quad (1.36)$$

Для таких процесів густина розподілу другого порядку є функція тільки $\tau = t_1 - t_2$.

Процес називають *стаціонарним в широкому сенсі*, якщо виконано дві умови:

1. Статистичне середнє за ансамблем вибірових функцій $\langle u(t) \rangle$ не залежить від t .

2. Статистичне середнє за ансамблем вибірових функцій від $\langle u(t_1), u(t_2) \rangle$ є функція тільки $\tau=t_1-t_2$.

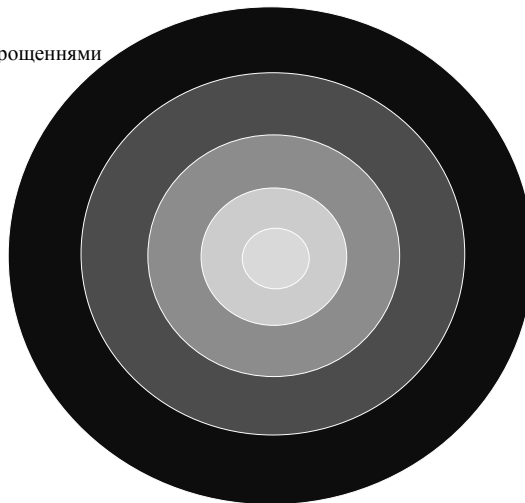
Функція може бути нестационарною, проте мати *стаціонарні припущення*, якщо різниця $U(t_1) - U(t_2)$ стаціонарна для будь-яких значень t_1 та t_2 . Тоді:

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\xi) d\xi \quad (1.37)$$

Значні переваги в експериментальному плані дають так звані *ергодичні процеси*. Для них статистичне середнє будь-якого порядку по ансамблю, дорівнює часовому середньому для однієї функції:

$$\tilde{g} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(u(t)) dt = \langle g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(u(t)) p_U(u) du \quad (1.38)$$

- Випадкові процеси
- Із стаціонарними припущеннями
- В широкому сенсі
- Строго стаціонарні
- Ергодичні



З огляду на те, що експериментатор не має в своєму розпорядженні 10^9 лабораторій, або установок для отримання статистичного ансамблю функцій, ергодичні процеси, що надають можливість працювати

Рис. 4 Класифікація випадкових процесів

тільки з однією випадковою функцією, набувають надзвичайної ваги. Звичайно, завжди залишається відкритим питання – чи можна вважати процес ергодичним *a priori*? Адже щось конкретне можна сказати тільки перевіривши (1.38).

Для того, щоб процес був ергодичним він має бути строго стаціонарним. Приклад нестационарного і, відповідно, неергодичного процесу наведено на Мал. 3. Навпаки, стаціонарний процес необов'язково буде ергодичним. Наприклад процес спостереження гармонічного сигналу на осцилографі із

ушкодженим перемикачем масштабу: з однаковою вірогідністю спостерігається сигнали з двома різними амплітудами.

$$u(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad p_A(a) = \frac{1}{2} \delta(a - A_1) + \frac{1}{2} \delta(a - A_2) \quad \phi = \frac{1}{2\pi} \in [0, 2\pi] \quad (1.39)$$

На Рис. 4 наведена умовна класифікація випадкових процесів.

ЗБІЖНОСТІ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Питання збіжності випадкових величин безпосередньо пов'язано із такими важливими поняттями як диференціювання, інтегрування та неперервність. Тому варто зупинитися на цьому окремо.

Послідовність випадкових величин u_i, \dots, u_n збігається за розподілом до випадкової величини u , якщо послідовність функцій розподілу $F_{u_i}(u), \dots, F_{u_i}(u)$ збігається до функції розподілу $F_u(u)$ в усіх точках безперервності останній. Стисло збіжність за вказаним критерієм записують у вигляді $u_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{з.р.} u$. Збіжність за розподілом називають також *слабкою збіжністю*.

Якщо функції $F_{u_i}(u)$ такі, що диференціюються, то при слабкій збіжності густина розподілу $p_{u_i}(u)$ збігається до $p_u(u)$ і, відповідно, характеристичні функції $\Theta_{u_i}(\omega)$ до $\Theta_u(\omega)$.

Послідовність випадкових величин u_i, \dots, u_n збігається за вірогідністю до випадкової величини u , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|u_n - u| \geq \varepsilon) = 0 \quad (1.40)$$

або стисло $u_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{з.в.} u$

Послідовність випадкових величин u_i, \dots, u_n збігається в середньоквадратичному до випадкової величини u , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (u_n - u)^2 \rangle = 0 \quad (1.41)$$

або стисло $u_{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{с.к.} u$.

Із збіжності в середньоквадратичному слідує збіжність за імовірністю, а із збіжності за вірогідністю — збіжність за розподілом.

В повній відповідності із наведеними критеріями імовірнісної збіжності можна ввести поняття неперервності випадкової функції $u(t)$ в точці t . Неперервність в середньоквадратичному тоді значить:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \langle (u(t + \Delta t) - u(t))^2 \rangle = 0 \quad \equiv \quad l.i.m. u(t + \Delta t) = u(t) \quad (1.42)$$

останній вираз походить від англійського limit in mean square. Аналогічним чином випадкова функція така, що диференціюється, якщо може бути визначена згідно із критерієм:

$$l.i.m. \left\langle \left(\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - \dot{u}(t) \right)^2 \right\rangle = 0 \quad \equiv \quad l.i.m. \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \dot{u}(t) \quad (1.43)$$

Зауважимо, що імовірнісна збіжність аж ніяк не передбачає неперервності можливих значень випадкової функції. Очевидний приклад тут – заряд, що приходить на анод в задачі про дробовий шум, і який є величиною дискретною. Разом з тим, струм, що визначається згідно із 1.43 є цілком фізичною величиною.

В тих самих критеріях збіжності можна визначити існування границі суми:

$$R_N = \sum_0^{N-1} u(t_i)(t_{i+1} - t_i) \quad (1.44)$$

або існування ріманова інтегралу від випадкової функції:

$$R = \int_a^b u(t) dt \quad a = t_0 \quad b = t_N \quad (1.45)$$

КОРЕЛЯЦІЙНІ ТА СПЕКТРАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ЗВ'ЯЗОК МІЖ НИМИ

Статистичний зв'язок між випадковими змінними U та V характеризують з допомогою змішаних моментів випадкових величин:

$$\langle u^m v^n \rangle = \int \int_{-\infty}^{\infty} u^m v^n p_{uv}(u, v) du dv \quad (1.46)$$

Серед них особливу роль відіграють такі моменти, як *кореляція*:

$$\Gamma_{UV} = \langle uv \rangle = \int \int_{-\infty}^{\infty} uv \cdot p_{uv}(u, v) du dv \quad (1.47)$$

коваріація:

$$B_{UV} = \langle (u - \bar{u})(v - \bar{v}) \rangle = \Gamma_{UV} - \langle u \rangle \langle v \rangle \quad (1.48)$$

та коефіцієнт кореляції:

$$R_{UV} = \frac{B_{UV}}{\sigma_U \sigma_V} \quad (1.49)$$

Як видно із (1.49) коефіцієнт кореляції обмежені по абсолютній величині одиницею. Якщо, він дорівнює одиниці, кажуть, що процеси повністю корельовані, -1 – антикорельовані. Відповідно, якщо нулю, це означає, що процеси статистично незалежні. Завжди, дві статистично незалежні величини некорельовані. Зворотне невірно. Класичний приклад: дві випадкові змінні $U = \sin \theta$, $V = \cos \theta$, де θ рівномірно розподілено на інтервалі $[0, \pi]$. Визначення однієї змінної автоматично визначає другу, тобто вони статистично залежні. Однак коефіцієнт кореляції дорівнює нулю.

Якщо U та V значення одного процесу в різні моменти часу, то до відповідних величин прибавляється приставка *авто*. Якщо процес стаціонарний, тобто не залежить від початкового моменту, то коефіцієнт кореляції стає парною функцією інтервалу часу τ між моментами часу коли беруться U та V . Максимальне значення функція кореляції набуває при $\tau=0$. При збільшенні інтервалу часу, статистичний зв'язок розпадається і в нескінченності, коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Характерний час, за який в декілька разів спадає коефіцієнт кореляції називають часом кореляції τ_k .

Як завжди, для описання хвильових процесів виключне значення мають спектральні характеристики. Подамо флуктуаційну компоненту довільної випадкової величини $\xi = u - \langle u \rangle$ у вигляді інтеграла Фур'є:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{j\omega t} d\omega \quad (1.50)$$

При різних реалізаціях процесу спектральні амплітуди по різному залежать від ω . Для дійсних функцій часу спектральні амплітуди комплексні і $\xi_{-\omega} = \xi_{\omega}^*$

Корисним є поняття спектральної густини, або енергетичного спектру (спектром потужності) флуктуацій, що описує розподіл середньої інтенсивності по частотам:

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega \quad (1.51)$$

Особливістю стаціонарних випадкових процесів є та обставина, що спектральна густина є Фур'є-трансформантою іншої фундаментальної характеристики процесу – кореляційної функції (*теорема Вінера-Хічина*). Щоб в цьому переконатися, запишемо вираз для кореляційної функції $B(\tau)$ скориставшись (1.50).

$$B(\tau) = \langle \xi \xi_{\tau} \rangle = \int \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle e^{j\omega t + j\omega'(t+\tau)} d\omega d\omega' \quad (1.52)$$

Оскільки залежність від часу t для стаціонарного процесу має бути відсутня, необхідно, щоб виконувалося:

$$\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = A(\omega) \delta(\omega + \omega') \quad (1.53)$$

Неважко бачити, що при цьому $A(\omega) \equiv G(\omega)$, оскільки $B(0) = \langle \xi^2 \rangle$. Для $G(\omega)$ та $B(\omega)$ отримуємо пару перетворень Фур'є:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega; \quad G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1.54)$$

Внаслідок парності функцій $G(\omega)$ та $B(\omega)$ вирази (1.54) можна переписати у вигляді:

$$B(\tau) = 2 \int_0^{\infty} G(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega; \quad G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (1.55)$$

Зазначимо, що вираз (1.55) можна записати і для повної кореляційної функції (з регулярною компонентою). Тоді:

$$G_{\psi}(\omega) = G(\omega) + \bar{u}^2 \delta(\omega); \quad \psi = \langle uu_{\tau} \rangle \quad (1.56)$$

Таким чином:

- А. При вивченні випадкових процесів поведінка випадкової величини описується розподілом імовірності, або густиною розподілу імовірності.
- В. Для характеристики статистичних властивостей двох і більше випадкових величин використовують сумісну густину ймовірностей.
- С. Детальну статистичну інформацію про випадкові процеси можна отримати, визначивши моменти, кумулянти або характеристичну функцію випадкових величин. Серед останніх головну роль відіграють моменти та кумулянти першого та другого порядку.
- Д. В практичних задачах найбільш часто зустрічається гаусів розподіл випадкових величин, що обумовлено статистичною незалежністю впливу безлічі незначних факторів (ЦПТ) на величину, що вимірюється.
- Е. Серед випадкових процесів найбільш визначне місце займають ергодичні процеси, що дозволяють статистичне усереднення замінити на часове.
- Ф. Статистичний зв'язок між випадковими величинами характеризується кореляційною функцією, яка є для стаціонарних процесів фур'є-трансформанта іншої фундаментальної характеристики – спектра потужності.