

Лекційні вправи до курсу “Загальна фізика: хвилі, квантова фізика, будова матерії”

Кравцов О.В.

3 листопада 2011 р.

1 Хвилі

1. Показати, що загальним розв’язком хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

є функція

$$\psi(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

2. Показати, що плоска і сферична хвилі задовільняють рівнянню Д’Аламбера.
3. Для ефекту Доплера отримати формулу:

$$\omega_{\text{rec}} = \omega_{\text{source}} \frac{v_{\text{wave}} - v_{\text{rec}}}{v_{\text{wave}} - v_{\text{source}}}.$$

Тут v_{wave} – швидкість хвилі, $v_{\text{rec}} \neq 0$ – швидкість приймача, $v_{\text{source}} \neq 0$ – швидкість джерела хвилі.

4. Показати, що плоска електромагнітна хвиля задовольняє рівнянню Д’Аламбера.
5. Отримати формулу для інтенсивності при битті:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Omega t + \alpha), \quad \Omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \alpha = \varphi_1 - \varphi_2.$$

6. Отримати формулу для інтенсивності при інтерференції:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

7. Отримати формулу для групової швидкості електромагнітних хвиль в середовищі з дисперсією $n(\omega)$:

$$u = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}.$$

8. Показати, що при додаванні *майже* монохроматичних хвиль $a_1 = A_1(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$, $a_2 = A_2(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$ інтерференційний доданок має вигляд $\langle I_{12}(t) \rangle = \langle A_1(t) A_2(t) \rangle \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.

9. Отримати спектр частот і довжин хвиль стоячих хвиль для стержня довжини L , який закріплено з одного кінця (другий кінець вільний). Вказівка: $a(0) = 0$, $da/dx|_{x=L} = 0$.

10. Для хвильових пакетів отримати співвідношення $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi$, $\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$.

11. Отримати формулу для оцінки абсолютної похибки d визначення місцезнаходження об'єкта за допомогою радіолокатора: $d \geq \sqrt{L\lambda}$, де L – відстань від радіолокатора до об'єкта, λ – довжина хвилі.

12. Оцінити максимальний радіус когерентності для сонячних променів.

13. Показати, що для джерела Ламберта зв'язок між світимістю M і яскравістю L задається формулою: $M = \pi L$.

14. В схемі інтерференції Юнга показати, що ширина інтерференційної смуги

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d},$$

де λ – довжина хвилі, L – відстань до екрану, d – відстань між щілинами.

2 Квантова фізика

15. *Ефект Комптона*. Навести докладний вивід формули для ефекту Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \varphi).$$

16. Виходячи з постулатів теорії Бора вивести формули (в системі СГС): $r_n = n^2 a_B$, де $a_B = \hbar^2/(me^2)$, $E_n = -E_0/n^2$, де $E_0 = me^4/(2\hbar^2)$, і

$$\omega_{sn} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{s^2} \right).$$

17. Виходячи з припущення, що частка є хвильовим пакетом з хвиль де Бройля, отримати формулу для фазової швидкості

$$V_\Phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2}} = V_\Phi(\omega),$$

тобто, хвильовий пакет розпливається.

18. Показати, що максимальне значення напруженості електричного поля в класичній фізиці $E_{\text{clas}}^{(\text{max})} = m^2 c^4 / e^3$, а в квантовій фізиці $E_{\text{quant}}^{(\text{max})} = 2m^2 c^4 / \hbar e$, тобто,

$$E_{\text{quant}}^{(\text{max})} = 2 \frac{e^2}{\hbar c} E_{\text{clas}}^{(\text{max})}.$$

Всі формули в системі СГС.

19. Показати, що $[\hat{M}_y, \hat{M}_z] = i\hbar \hat{M}_x$.
20. Показати, що густина струму ймовірності для вільної частки $\vec{j} = \rho \vec{v}$, де $\rho = |\psi|^2$.
21. Знайти середній квадрат імпульса частки, що рухається в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі. Частка знаходиться на рівні з $n = 1$.
22. Отримати рівняння Шрьодінгера для одновимірного осцилятора в безрозмірних змінних:

$$\psi''(\xi) + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0.$$

23. Знайти середню (повну) енергію осцилятора з трьома степенями вільності.

24. Показати, що хвиля де Бройля

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp \left[-\frac{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar} \right]$$

задовільняє рівнянню Шрьодінгера.

25. *Тунельний ефект*. Показати, що коефіцієнт проходження через потенціальний бар'єр (в лекційних позначеннях):

$$D = \frac{|\vec{j}_3|^2}{|\vec{j}_1|^2} = |C_3|^2, \quad (\text{де } C_1 = 1).$$

3 Фізика макросистем

26. Показати, що для ідеального газу при температурі T найбільш ймовірна швидкість дорівнює

$$v_{\text{max,prob}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

а середній модуль швидкості

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

27. Зобразити поверхню стану ідеального газу в координатах (PVT) .

28. Отримати рівняння Пуассона $PV^\gamma = \text{const}$ для ідеального газу.

29. Показати, що частота Дебая дорівнює $\omega_D = (6\pi^2 n)^{1/3} \langle v \rangle$.

30. Показати, що теплова енергія решітки при низьких температурах

$$E_{\text{heat}} = B\hbar \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{B\hbar}{15} \left(\frac{\pi k}{\hbar} \right)^4 T^4,$$

де

$$B = \frac{12\pi V}{(2\pi\langle v \rangle)^2},$$

V – об'єм решітки.

31. Енергія кристалічної ґратки при $T \gg \Theta$ $E_p = C_V T + const = 3RT + const$. Знайти значення сталої в цьому виразі.