

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
УКРАЇНИ

“Київський політехнічний інститут”

Фізико-технічний інститут

*Серія “На допомогу студенту”*

*Загальна фізика*

О. В. Гомонай, О. В. Кравцов

# Задачі з загальної фізики

## Електродинаміка

---

Навчальний посібник

Київ 2009

**Гомонай О.В., Кравцов О.В.** Задачі з загальної фізики: електродинаміка. Навчальний посібник – К.: НТУУ “КПІ”, 2009.– 109 с.

Посібник містить більше 300 задач з загальної фізики, розділ “Електродинаміка”. Кожній темі передують теоретичний довідник, який містить основні положення та формули, а також опис відповідного математичного апарату. В кінці посібника наведені завдання та методичні вказівки до трьох розрахунково-графічних робіт, які ілюструють курс електродинаміки.

Посібник орієнтований на студентів інженерно-технічних спеціальностей з поглибленою математичною підготовкою.

*Рекомендовано Методичною радою НТУУ “КПІ”  
Протокол N 5 від 21 січня 2010 р.*

*Навчальне видання*

**ГОМОНАЙ Олена Василівна  
КРАВЦОВ Олег Васильович**

## **Задачі з загальної фізики. Електродинаміка**

**Відповідальний редактор  
доцент кафедри інформаційної безпеки  
фізико-технічного інституту НТУУ “КПІ”  
к.ф.-м.н. Т.В. Литвинова**

*Комп’ютерна верстка  
у вид. системі LaTeX-2 $\epsilon$*

**© ФТІ НТУУ “КПІ”, 2009**

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>5</b>
<b>Задачі</b>	<b>7</b>
A Вступ до електродинаміки: заряд, поле, струм . . . . .	7
1. Властивості електричного заряду. Закон Кулона . .	13
2. Електричний струм. Сила струму, густина струму. Магнітне поле струмів і зарядів, що рухаються . . .	15
3. Перетворення полів. Сила Лоренца . . . . .	18
4. Електричні поля розподілених зарядів . . . . .	21
B Вступ до електродинаміки: математичний апарат . . . . .	23
1. Лінії поля. Інтегральні характеристики векторних полів . . . . .	29
2. Диференціальні характеристики векторних полів. Теорема Гаусса і Стокса . . . . .	30
C Рівняння Максвелла в вакуумі. Вектор Пойнтинга . . . . .	34
D Електростатика і магнітостатика в вакуумі . . . . .	42
1. Електростатика в вакуумі . . . . .	44
2. Магнітостатика в вакуумі . . . . .	50
3. Провідник в електростатичному полі . . . . .	51
4. Енергія системи зарядів і струмів . . . . .	54
5. Електричні та магнітні диполі . . . . .	57
E Електромагнітне поле в речовині . . . . .	61
1. Діелектрики . . . . .	63
2. Магнетики . . . . .	64
3. Граничні умови для електричних та магнітних полів	65
F Сталі електричні струми в провідниках . . . . .	68
1. Причини виникнення електричних струмів. Еле- ктрорушійна сила (ЕРС). Закони Кірхгофа . . . . .	69

2.	Електропровідність . . . . .	71
3.	Сталий електричний струм . . . . .	72
G	Електромагнітна індукція . . . . .	74
1.	Явище електромагнітної індукції . . . . .	76
2.	Релаксаційні процеси в колах з конденсатором та індуктивністю . . . . .	81
3.	Змінний струм. Імпеданс. Електромагнітні коливання	83
<b>Завдання для розрахункової роботи</b>		<b>90</b>
<b>A Електричне поле зарядів в вакуумі</b>		<b>90</b>
<b>Б Електричне поле об'ємно розподілених зарядів</b>		<b>94</b>
<b>В Згасаючі та вимушені коливання</b>		<b>98</b>
<b>Відповіді</b>		<b>102</b>
<b>Додатки</b>		<b>108</b>
H	Вимоги до розрахункової роботи . . . . .	108
1.	Оформлення титульного листа . . . . .	108
2.	Приклад оформлення завдання . . . . .	109

# Вступ

Даний посібник зв'явився в результаті багаторічної практики викладання загальної фізики на фізико-технічному факультеті Національного технічного університету України "КП".

Підбір задач для практичних занять з загальної фізики для студентів нефізичних спеціальностей – завжди непросте завдання. Особливо складне воно у випадку, коли підготовка студентів націлена на поглиблене вивчення математичних дисциплін та їх практичне застосування. При підготовці цього посібника автори намагалися відібрати або придумати такі задачі, які:

- ілюструють основні принципи електродинаміки;
- прозорі з фізичної точки зору (одна задача – один принцип), але нетривіальні;
- вимагають від студента вільного володіння математичним апаратом.

Особливістю цієї збірки є достатня кількість задач математичного характеру, які привчають студентів до роботи з векторами, тензорами, диференціальними формами, поверхневими та контурними інтегралами і застосування цих математичних об'єктів для опису таких фізичних величин, як електромагнітні поля, потоки, циркуляції, і т.і.

Всі задачі впорядковані за темами, які відповідають пунктам програми з курсу загальної фізики, розділ "Електродинаміка" для студентів інженерно-технічних спеціальностей. Задачі підвищеної складності відмічені зірочками. Для зручності на початку кожного розділу наведені розширені, в порівнянні з типовими посібниками, теоретичні відомості, в які включені основні формули та рисунки і схеми, що їх ілюструють.

При роботі з посібником рекомендуємо користуватися не тільки теоретичним довідником, але й конспектом лекцій або підручником. Доцільно спочатку визначити, який саме принцип або явище ілюструє та чи інша задача, прочитати відповідний розділ конспекту, і після цього приступити до розв'язання задачі.

Окрім задач, в даний посібник включені завдання для самостійної роботи (з відповідними методичними вказівками) за трьома темами: “Електростатика в вакуумі”, “Електростатика в середовищі”, “Електромагнітні коливання”. При виконанні цих завдань ми рекомендуємо спочатку ознайомитись з теоретичним матеріалом за конспектом лекцій або за підручником, самостійно отримати загальні співвідношення, на основі яких будуть зроблені розрахунки, і лише після цього робити безпосередні числові обчислення. Дуже корисною процедурою, яка дозволяє знизити ймовірність помилки, є перевірка розмірностей на кожному етапі обчислень. При побудові графіків корисно проаналізувати їх, відповівши на запитання:

- чи відповідає характер отриманих залежностей загальним фізичним принципам?
- чи існують точки, в яких отримані залежності мають математичні особливості (екстремуми, точки зламу, розриви)?
- яка причина цих особливостей? Чи “закладені” ці особливості в загальних рівняннях?
- чи всі графіки мають (і повинні мати) особливості при однакових значеннях змінних?
- яка точність вхідних даних? Чи узгоджується вона з точністю вихідних даних? Скільки значущих цифр слід наводити на проміжних та на кінцевих етапах розрахунків?

Автори вдячні студенту Кікотю М. за надану можливість використати його конспект лекцій при підготовці рукопису.

# Задачі

## А Вступ до електродинаміки: заряд, поле, струм

### Теоретичний довідник

Закон Кулона (див. Рис. 1):

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \frac{kq_1q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

де  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ . Тут і далі  $k = 1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$  м/Ф, де електрична стала  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м.

Покомпонентно:

$$F_{1x} = \frac{kq_1q_2(x_2 - x_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}},$$

$$F_{1y} = \frac{kq_1q_2(y_2 - y_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}},$$

$$F_{1z} = \frac{kq_1q_2(z_2 - z_1)}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}.$$

Електричне поле точкового заряду  $Q$  в точці А з радіус-вектором  $\vec{r}$  (див. Рис. 2):

$$\vec{E} = \frac{kQ}{r^3}\vec{r}, \quad \text{де} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Покомпонентно:

$$E_x = \frac{kQx}{r^3}, \quad E_y = \frac{kQy}{r^3}, \quad E_z = \frac{kQz}{r^3}.$$

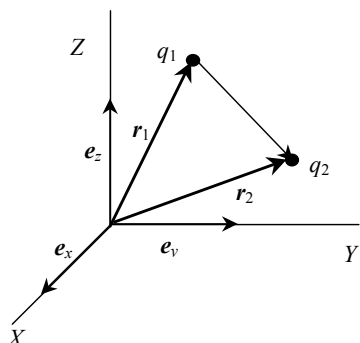


Рис. 1:

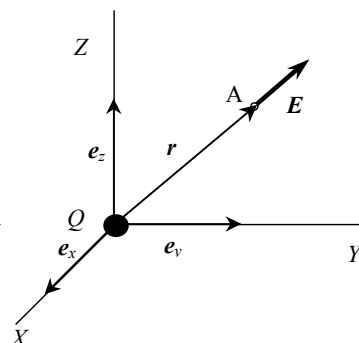


Рис. 2:

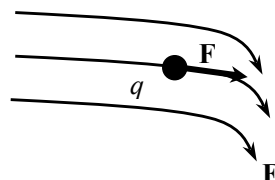


Рис. 3:

Електрична складова сили Лоренца (див. Рис. 3):  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ .

Принцип суперпозиції полів, створених дискретними зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n.$$

Перехід від дискретного розподілу заряду до неперервного:

$$\sum q_i \rightarrow \int dq,$$

де

$$dq = \rho dV, \quad \text{або} \quad \sigma dS, \quad \text{або} \quad \lambda d\ell.$$

$\rho$  - об'ємна густина заряду (Рис. 4а),  $\sigma$  - поверхнева густина заряду (Рис. 4b),  $\lambda$  - лінійна густина заряду (Рис. 4с).

Принцип суперпозиції полів, створених неперервно розподіленими в просторі  $\Sigma$  зарядами:

$$\vec{E} = \int_{\Sigma} d\vec{E} = \int_{\Sigma} \frac{k dq}{r^3} \vec{r}.$$

При інтегруванні початок радіус-вектора  $\vec{r}$  перебігає весь простір  $\Sigma$  (див. Рис. 4).

Закон збереження заряду:

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = \text{const.}$$

Магнітне поле рухомого заряду (див. Рис. 5):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3},$$



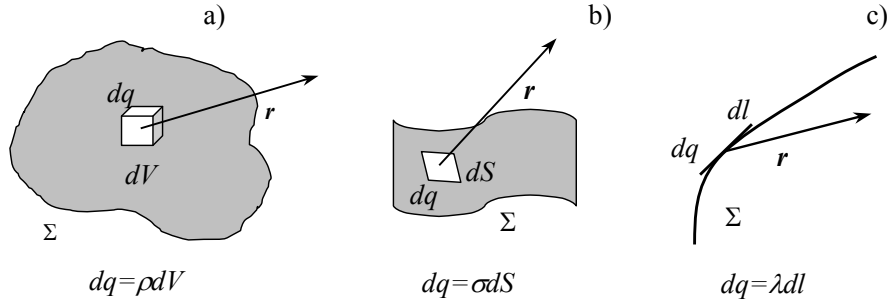


Рис. 4: Неперервний розподіл заряду.

де магнітна стала  $\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість світла в вакуумі. Принцип суперпозиції магнітних полів:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \dots + \vec{B}_n,$$

Магнітна складова сили Лоренца:  $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$ , або в явному вигляді:

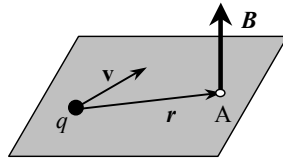


Рис. 5:

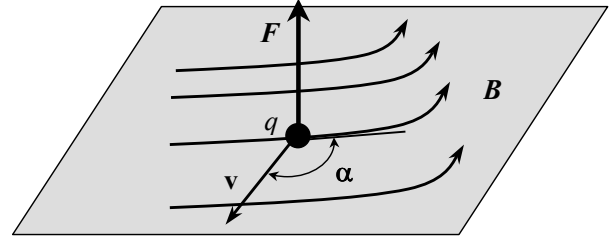


Рис. 6:

$$\vec{F}_M = q \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

або покомпонентно:

$$F_x = q(v_y B_z - v_z B_y), \quad F_y = q(v_z B_x - v_x B_z), \quad F_z = q(v_x B_y - v_y B_x).$$

Величина сили Лоренца:  $F_M = qvB \sin \alpha$  (див. Рис. 6).

Сила струму:

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{\text{через } S} = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) dS,$$

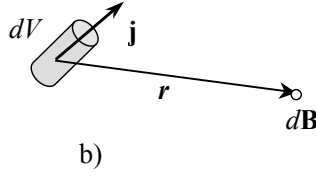
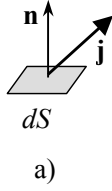


Рис. 7:

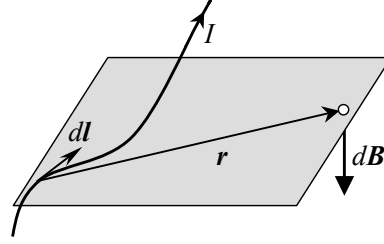


Рис. 8:

де густина струму  $\vec{j} = \rho\vec{v}$ ,  $\vec{n}$  – вектор одиничної нормалі до поверхні  $S$  (див. Рис. 7а).

Магнітне поле рухомого розподіленого заряду (закон Біо-Савара, див. Рис. 7b):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV.$$

Для тонкого провідника вводять елемент струму  $I d\vec{\ell} = \vec{j} dV$ , де вектор  $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$  – дотичний до провідника (див. Рис. 8).

Закон Біо-Савара для тонких провідників (див. Рис. 8):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Сила Ампера, що діє на струм у зовнішньому магнітному полі (див. Рис. 9):

$$d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} dV \quad \text{або} \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}.$$

Сила Лоренца (див. Рис. 10а):

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_M = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Співвідношення між магнітною та електричною складовою сили Лоренца для двох зарядів, що рухаються паралельно (див. Рис. 10b):

$$\frac{F_M}{F_e} = \frac{v_1 v_2}{c^2}.$$

Формули для перетворення полів (див. Рис. 11):

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel},$$

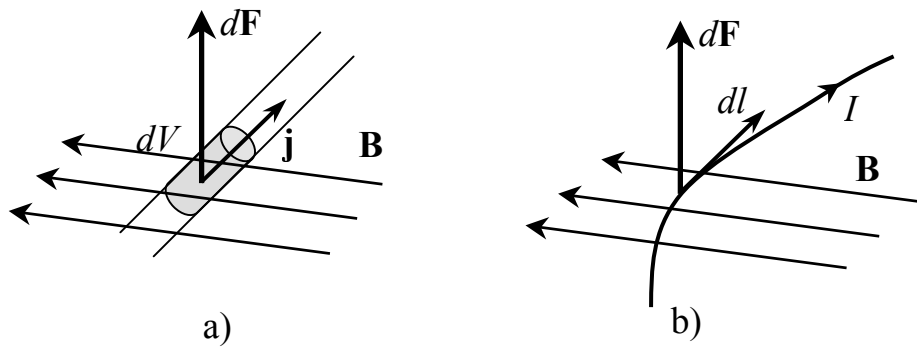


Рис. 9: Сила Ампера.

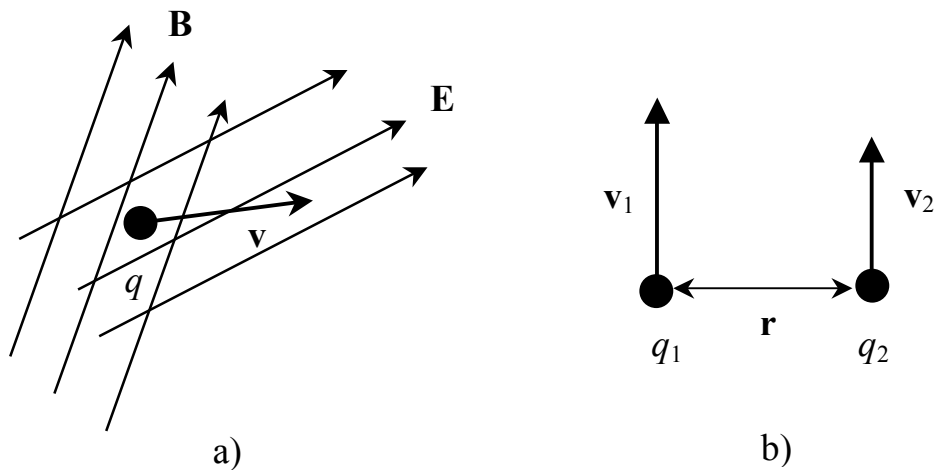


Рис. 10: Сила Лоренца.

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_0 \times \vec{B}}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \vec{v}_0 \times \vec{E}/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

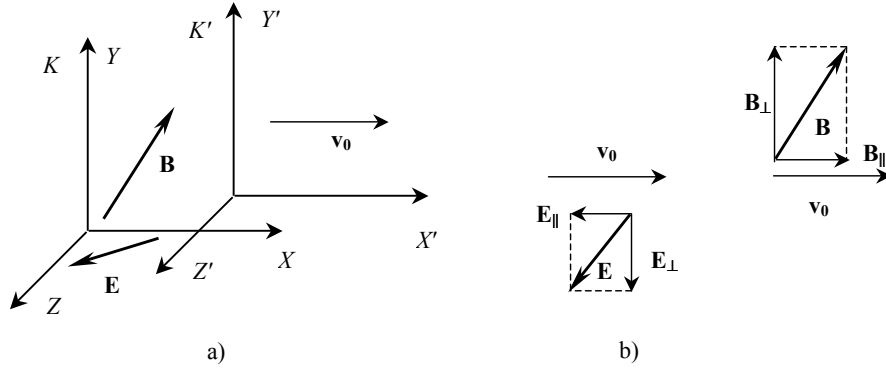


Рис. 11: Електромагнітне поле в різних системах відліку.

Інваріанти електромагнітного поля:  $E^2 - c^2 B^2$ ;  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

## Деякі формули векторної алгебри

Представлення вектора:  $\vec{C} = C_x \vec{e}_x + C_y \vec{e}_y + C_z \vec{e}_z$ , де одиничні вектори  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  – орти декартової системи координат (див. Рис. 12).

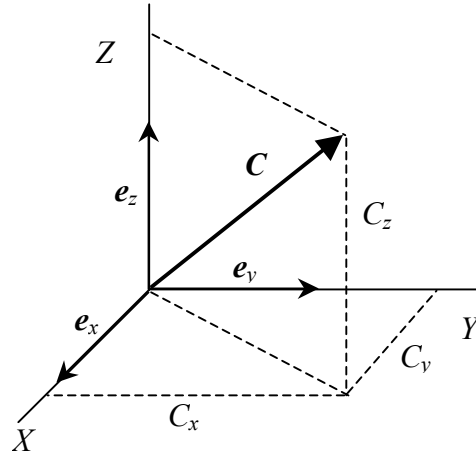


Рис. 12:

## Операції з векторами

1. Додавання: сума векторів є вектором,  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ , або

$$\vec{C} = (A_x + B_x)\vec{e}_x + (A_y + B_y)\vec{e}_y + (A_z + B_z)\vec{e}_z.$$

2. Скалярний добуток (скаляр):  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

3. Векторний добуток (вектор):  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ , або

$$\vec{C} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{e}_z.$$

4. Мішаний добуток (скаляр):

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

## Важливі властивості добутоків векторів

Векторного добутку:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A},$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}),$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}).$$

Мішаного добутку:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}.$$

## 1. Властивості електричного заряду. Закон Кулона

- Довести, що  $\vec{A}^2 \vec{B}^2 = (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2$
- Два точкових заряди, величиною а)  $q$  і  $-4q$ ; б)  $q$  і  $4q$  розташовані на відстані  $a$  один від одного. Знайти величину третього заряду  $Q$  і місце, де його слід розташувати, щоб вся система знаходилась в стані рівноваги.
- Чи може точковий заряд знаходитись в стані стійкої рівноваги під дією лише кулонівських сил? *Вказівка:* розглянути можливий рух заряду при невеликому зміщенні з точки рівноваги.

4. Початкова швидкість точкового електричного заряду, розміщеного в електростатичному полі, дорівнює нулю. Чи співпадає траєкторія руху заряду з силовою лінією поля? Відповідь обґрунтувати.
5. Чи потребують перетворення Галілея інваріантності електричного заряду? Відповідь обґрунтувати.
6. Два точкових додатних заряди  $q_1$  і  $q_2$  знаходяться в точках з радіус-векторами  $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$ . Знайти величину від'ємного заряду  $q_3$  і радіус-вектор  $\vec{r}_3$  точки, в якій його слід розмістити, щоб сила, яка діє на кожний з зарядів, дорівнювала б нулю.
7. Три невеликих однаково заряджених кульки маси  $m = 9,0$  г підвішені до однієї точки на шовкових нитках довжини  $\ell = 250$  мм. Знайти заряд кожної з кульок, якщо кути між нитками після їх розходження дорівнюють  $2\alpha = 60^\circ$ .
8. Точковий заряд  $q = +50$  мкКл знаходиться на площині  $xy$  в точці з радіус вектором  $\vec{r}_0 = (2, 3, 0)$ . Знайти вектор напруженості  $\vec{E}$  електричного поля і величину  $E$  в точці з координатами  $\vec{r} = (8, -5, 0)$ . Координати задані в метрах.
9. Знайти відношення електричної та гравітаційної сил взаємодії між двома електронами; двома протонами. При якому значенні питомого заряду  $q/m$  частки ці сили будуть рівними? Прийняти електричну сталу  $1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$  м/Ф, гравітаційну сталу  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  м<sup>3</sup>/(кг·с<sup>2</sup>), питомі заряди електрона та протона, відповідно,  $e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг та  $e/m_p = 0,959 \cdot 10^8$  Кл/кг.
10. Дві невеликих однаково заряджених кульки маси  $m = 5,0$  г підвішені до однієї точки на шовкових нитках і знаходяться на одному рівні. Нитки утворюють між собою малий кут  $\theta$ . Знайти швидкість витікання заряду  $dq/dt$  з кожної кульки в момент, коли  $\theta = 5,0^\circ$ , якщо швидкість, з якою зближуються кульки стала і дорівнює  $v = 0,55$  мм/с.
11. Три невеликих кульки, кожна маси  $m = 6,0$  г та з зарядом  $q = 1,0$  мкКл, з'єднані шовковими нитками, утворюючи таким чином рівносторонній трикутник зі стороною  $\ell = 200$  мм. Одну з ниток перепалили. Знайти прискорення середньої кульки через деякий скінчений проміжок часу  $\delta t \gg \tau$ , де  $\tau$  – характерний (чим визначається?) час системи. Силою тяжіння знехтувати.
12. Частка з питомим зарядом  $\alpha = q/m$  рухається прямолінійно під дією електричного поля  $E = E_0 - \epsilon x$ , де  $E_0$ ,  $\epsilon \geq 0$  – сталі,  $x$  –

відстань від точки, з якої частка почала рухатись з нульовою початковою швидкістю. Знайти а) залежність швидкості частки від  $x$ ; б) відстань, яку частка пройшла до зупинки. Розглянути релятивістський і нерелятивістський випадки.

13. Електрон починає рухатись в однорідному електричному полі з напруженістю  $E = 10$  кВ/см. Через який час після початку руху кінетична енергія електрона буде дорівнювати його енергії спокою? Питомий заряд електрона  $e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.
14. Релятивістський протон в момент часу  $t = 0$  влетів зі швидкістю  $\vec{v}_0$  в область, де є однорідне електричне поле з напруженістю  $\vec{E} \perp \vec{v}_0$ . знайти залежність від часу кута  $\theta(t)$  між швидкістю  $\vec{v}$  протона та початковим напрямком його руху.
15. Заряд  $q$  рухається в кулонівському полі нерухомого силового центра. Показати, що вектор  $\vec{K} = \vec{v} \times \vec{M} + \alpha \vec{r}/r$  не змінюється з часом. Тут  $\vec{v}, \vec{M}$  – відповідно швидкість заряду та його момент імпульсу відносно центра,  $\alpha$  – стала. Визначити значення  $\alpha$ , якщо заряд силового центра  $Q$ . Заряд вважати нерелятивістським.

## 2. Електричний струм. Сила струму, густина струму. Магнітне поле струмів і зарядів, що рухаються

16. Два протони рухаються паралельно один одному з однаковою швидкістю  $v = 300$  км/с. Знайти відношення сил магнітної та електричної взаємодії цих протонів.
17. Знайти модуль та напрямок сили, що діє на одиницю довжини довгого тонкого провідника зі струмом  $I = 8,0$  А в точці О, якщо провідник має форму, вказану на Рис.13. У випадку а) радіус  $R = 10$  см, у випадку б) відстань між довгими паралельними ділянками провідника  $\ell = 20$  см.
18. Квадратна рамка зі струмом  $I = 0,90$  А лежить в одній площині з довгим прямим провідником, вздовж якого тече сталий струм  $I_0 = 5$  А. Сторона рамки  $a = 8$  см. Провідник розташований паралельно до осі рамки, що проходить через її протилежні сторони, відстань між провідником і центром рамки в  $\eta=2$  рази більша за сторону рамки. Знайти силу Ампера, що діє на рамку.

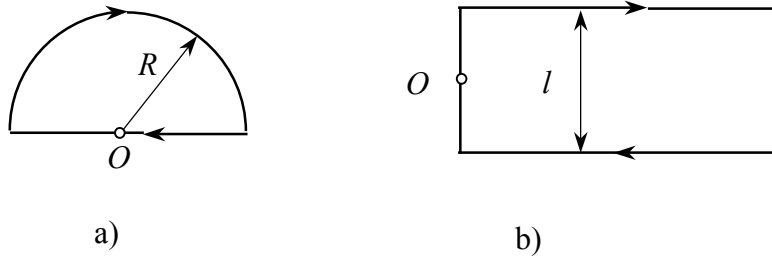


Рис. 13:

19. Два паралельних тонких дроти зі струмами  $I = 6,0$  А в кожному (струми течуть в одному напрямку) віддалили один від одного таким чином, що відстань між ними стала в  $\eta = 2$  разів більша за початкову. Яку роботу на одиницю довжини дротів виконали при цьому сили Ампера?
20. В електромагнітному насосі для перекачки розплавленого металу ділянка труби з металом знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого має величину  $B=0,1$  Тл і спрямований перпендикулярно до осі труби. Через цю ділянку труби в напрямку, перпендикулярному і до вектора  $\vec{B}$ , і до осі труби, пропускають струм  $I = 100$  А, рівномірно розподілений по перерізу труби. Знайти надлишковий тиск, який створює насос, якщо переріз труби має форму квадрату зі стороною  $a = 2$  см.
21. Квадратна рамка зі стороною  $a$  лежить в одній площині з довгим прямим провідником, вздовж якого тече сталий струм  $I_1$ . Вздовж рамки тече струм  $I_2$ . Найближча сторона рамки розташована на відстані  $r$  від провідника і має однаковий з ним напрямок струму. Знайти силу Ампера, що діє на рамку.
22. Точковий заряд рухається зі швидкістю  $v=900$  м/с. В певний момент часу в точці Р напруженість електричного поля цього заряду дорівнює  $E=600$  В/м, а кут між векторами  $\vec{E}$  і  $\vec{v}$  дорівнює  $\alpha = 30^\circ$ . Знайти індукцію магнітного поля  $B$  даного заряду в точці Р в цей момент.
23. Струм тече по плоскому контуру, вказаному на Рис. 14, де  $r = r_0(1 + \varphi)$ . Знайти магнітну індукцію  $B$  в точці О.
24. Заряджена частка рухається по колу радіуса  $R = 0,10$  м в однорідному магнітному полі з індукцією  $B = 10,0$  мТл. Знайти швид-



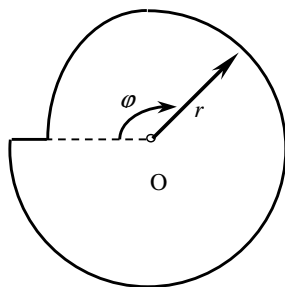


Рис. 14:

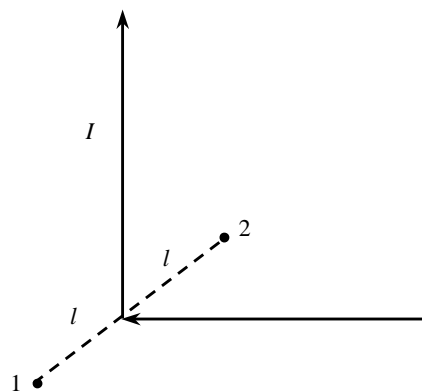


Рис. 15:

- кість та період обертання, якщо частка: а) нерелятивістський протон; б) релятивістський електрон.
25. Знайти магнітну індукцію  $B$  в центрі контуру, який має форму прямокутника з діагоналлю  $d = 16$  см та кутом між діагоналями  $\varphi = 30^\circ$ . По контуру тече струм  $I = 5,0$  А.
  26. По колу радіуса  $R = 100$  мм з тонкого дроту тече струм  $I = 0,50$  А. Знайти магнітну індукцію а) в центрі витка; б) на осі витка на відстані  $z = 100$  мм від його центру.
  27. Довгий дріт зі струмом  $I$  зігнутий під прямим кутом. Знайти магнітну індукцію в точках 1 і 2, які знаходяться на бісектрисі цього кута на відстані  $\ell$  від вершини кута (див. Рис. 15).
  28. Визначити вектор  $\vec{B}$  індукції магнітного поля струму, який рівномірно розподілено а) по площині з лінійною густиною  $\vec{i}$ ; б) по двом паралельним площинам  $z = \pm \ell$  з лінійними густинами  $\vec{i}$  та  $-\vec{i}$ .
  29. Визначити вектор  $\vec{B}$  індукції магнітного поля струму, який рівномірно розподілено по двом паралельним площинам  $z = \pm \ell$  з однаковою лінійною густиною  $\vec{i}$ .
  30. Визначити магнітну індукцію в точці О, якщо провідник зі струмом має вигляд, вказаний на Рис. 16.
  31. Вздовж кругового провідника тече струм  $I$ . Вісь  $z$  проходить через центр кола перпендикулярно його площині. Знайти інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} B_z dz$ .
  32. Непровідний тонкий диск радіуса  $R$ , рівномірно заряджений по поверхні з густиною  $\sigma$ , обертається навколо своєї осі зі сталою кут-

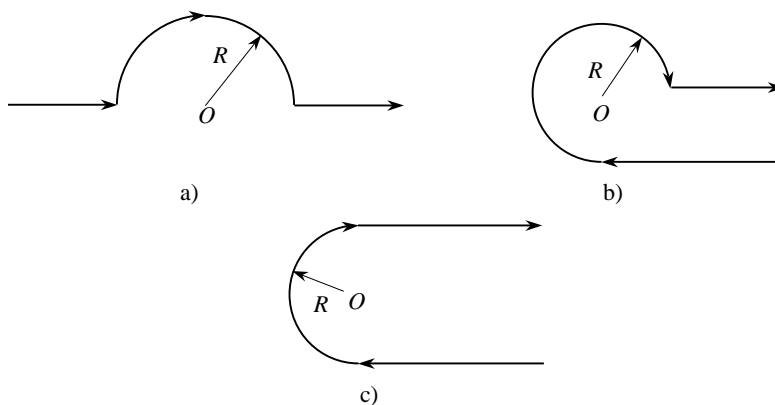


Рис. 16:

- вою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Знайти індукцію магнітного поля в центрі диска.
33. Непровідна сфера радіуса  $R=50$  мм заряджена рівномірно з поверхневою густиною  $\sigma = 10,0$  мкКл/м<sup>2</sup>, обертається з кутовою швидкістю  $\omega=70$  рад/с навколо осі, що проходить через її центр. Знайти магнітну індукцію в центрі сфери.
34. По двом тонким довгим паралельним провідникам в одному напрямку течуть сталі струми  $I_1$  та  $I_2$ . Один з провідників (правий) має форму смуги ширини  $b$ , а відстань від його правого краю до лівого провідника дорівнює  $a$ . Вважаючи, що обидва провідники лежать в одній площині, знайти силу магнітної взаємодії між ними в розрахунку на одиницю їх довжини.
35. Провідну площину зі струмом розмістили в зовнішньому магнітному полі, як показано на Рис.17. В результаті індукція магнітного поля з одного боку від площини дорівнює  $B_1$ , а з іншого –  $B_2$ . Знайти магнітну силу, що діє на одиницю площини поверхні в кожному з випадків, вказаних на Рис.17. З'ясувати напрямок струму в кожному з випадків.

### 3. Перетворення полів. Сила Лоренца

36. В інерціальній  $K$ -системі є тільки однорідне електричне поле з напруженістю  $E = 8$  кВ/м. Знайти модуль і напрямок а) вектора  $\vec{E}'$ ; б) вектора  $\vec{B}'$  в  $K'$ -системі, яка рухається відносно  $K$ -системи з по-

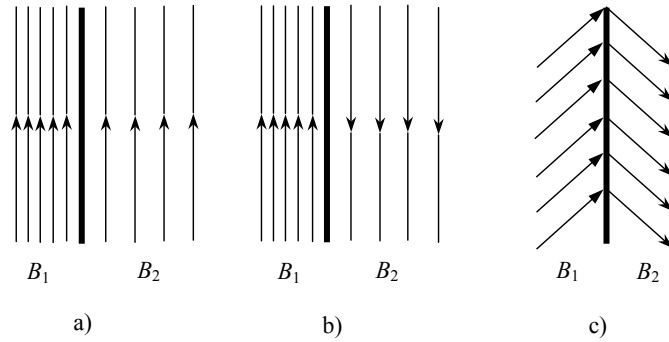


Рис. 17:

- стією швидкістю  $\vec{v}$  під кутом  $\alpha = 45^\circ$  до вектора  $\vec{E}$ . Швидкість  $K'$ -системи  $v = 0,60c$ .
37. В інерціальній  $K$ -системі є тільки однорідне магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ . Знайти напруженість електричного поля в  $K'$ -системі, яка рухається з нерелятивістською швидкістю  $\vec{v} \perp \vec{B}$  відносно  $K$ -системи. Для розв'язку задачі розглянути сили, що діють на уявний заряд в обох системах відліку в момент, коли швидкість заряду в системі  $K'$  дорівнює нулю.
  38. В інерціальній  $K$ -системі є тільки однорідне магнітне поле з індукцією  $B = 0,8$  Тл. Знайти модуль і напрямки а) вектора  $\vec{E}'$ ; б) вектора  $\vec{B}'$  в  $K'$ -системі, яка рухається відносно  $K$ -системи з постійною швидкістю  $\vec{v}$  під кутом  $\alpha = 45^\circ$  до вектора  $\vec{E}$ . Швидкість  $K'$ -системи  $v = 0,60c$ .
  39. За допомогою формули для перетворення полів перевірити інваріантність величин а)  $(\vec{E} \cdot \vec{B})$ ; б)  $E^2 - c^2 B^2$ .
  40. За допомогою формул з задачі 39 показати, що якщо в інерціальній  $K$ -системі відліку є тільки електричне або тільки магнітне поле, то в будь-якій іншій інерціальній  $K'$ -системі одночасно існують як електричне, так і магнітне поле, причому  $\vec{E}' \perp \vec{B}'$ .
  41. В інерціальній  $K$ -системі відліку є тільки електричне поле з напруженістю  $\vec{E} = a(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)/(x^2 + y^2)$ , де  $a = \text{const}$ . Знайти індукцію  $\vec{B}'$  магнітного поля в  $K'$ -системі, яка рухається відносно  $K$ -системи з нерелятивістською сталою швидкістю  $\vec{v} = v\vec{e}_z$ . Вважати, що осі  $z'$  і  $z$  співпадають. Який вигляд має поле  $\vec{B}'$ ?
  42. В інерціальній  $K$ -системі відліку є два однорідних взаємно пер-

пендикулярних поля: електричне з напруженістю  $E = 40 \text{ кВ/м}$  і магнітне з індукцією  $B = 0,20 \text{ Тл}$ . Знайти напруженість  $E'$  (або індукцію  $B'$ ) поля в тій  $K'$ -системі відліку, в якій спостерігається тільки одне поле (електричне або магнітне).

43. В інерціальній  $K$ -системі відліку є два однорідних взаємно перпендикулярних поля: електричне з напруженістю  $\vec{E}$  і магнітне з індукцією  $\vec{B}$ , причому  $E \neq cB$ . знайти швидкість  $\vec{v}$  такої інерціальної системи відліку, в якій існує а) тільки електричне; б) тільки магнітне поле. Визначити ці поля.
44. З початку координат області, де створені однорідні паралельні осі  $Y$  електричне та магнітне поля з напруженістю  $E$  та індукцією  $B$  вилітає в напрямку осі  $X$  нерелятивістська частка з питомим зарядом  $q/m$  та початковою швидкістю  $v_0$ . Знайти координати  $y_n$  частки в момент, коли вона в  $n$ -тий раз перетне вісь  $Y$ .
45. Нерелятивістські протони рухаються прямолінійно в області, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне та магнітне поля з  $E = 4,0 \text{ кВ/м}$  а  $B = 50 \text{ мТл}$ . Траєкторія протонів лежить в площині  $XZ$  та утворює кут  $\phi = 30^\circ$  з віссю  $X$ . Знайти крок гвинтової лінії, вздовж якої будуть рухатись протони після вимкнення електричного поля.
46. Частка з питомим зарядом  $q/m$  рухається в області, де створені однорідні взаємно перпендикулярні електричне та магнітне поля з напруженістю  $\vec{E} \parallel Y$  та індукцією  $\vec{B} \parallel Z$ . В момент часу  $t = 0$  частка знаходилась в в початку координат в стані спокою. Знайти (для нерелятивістського випадку) а) закон руху частки  $x(t), y(t)$  та вигляд траєкторії; б) довжину ділянки траєкторії між двома найближчими точками, в яких швидкість частки обертається на нуль; в) середнє значення проекції швидкості частки на вісь  $X$  (швидкість дрейфу).
47. Вздовж нескінченного однорідного циліндру довільного радіуса тече сталий струм з об'ємною густиною  $\vec{j}$ . Об'ємна та поверхнева густина заряду циліндра дорівнює нулю. Знайти швидкість  $\vec{v}$  тих інерціальних систем відліку, в кожній точці простору яких напруженість електричного поля в  $N/c$  разів менша за індукцію магнітного поля (тут  $c$  – швидкість світла).
48. Вздовж нескінчено довгого прямого провідника тече струм  $I$ , який створює навколо себе магнітне поле  $B = \mu_0 I / (2r)$ , де  $r$  – відстань від провідника. Паралельно провіднику на відстані  $R$  від нього по-

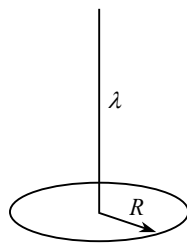


Рис. 18:

чинає рухатись зі швидкістю  $\vec{v}$  заряджена частка (протон). Знайти час  $\tau$ , за який частка впаде на провідник. Задачу розв'язати а) в системі відліку, що рухається зі швидкістю  $\vec{v}$ ; б) в лабораторній системі відліку; в) в системі відліку, яка рухається паралельно провіднику зі швидкістю  $c/2$ .

#### 4. Електричні поля розподілених зарядів

49. Тонке напівкільце радіуса  $R=20$  см заряджено рівномірно зарядом  $q=0,70$  нКл. Знайти модуль напруженості електричного поля в центрі кривизни цього напівкільця.
50. Кільце радіуса  $r$  із тонкого дроту має заряд  $q$ . Знайти модуль напруженості електричного поля на осі кільця як функцію відстані  $l$  до його центра. Дослідити отриманий вираз на великих відстанях  $l \gg r$ . Визначити максимальне значення напруженості і відповідне значення  $l$ . Зобразити залежність  $E(l)$  графічно.
51. Рівномірно заряджена дуже довга нитка розташована вздовж осі кола радіуса  $R$  (див. Рис.18). Один кінець нитки співпадає з центром кола, рівномірно зарядженого до заряду  $Q$ . Заряд нитки на одиницю довжини дорівнює  $\lambda$ . Знайти силу взаємодії між кільцем та ниткою.
52. Знайти напруженість електричного поля в центрі сфери радіуса  $R$  з поверхневою густиною заряду  $\sigma = (\mathbf{a}r)$ , де  $\mathbf{a}$  – сталий вектор,  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор точки з центра сфери.
53. Два точкових заряди  $+q$  і  $-q$  розташовані на відстані  $\ell$  один від одного. Знайти вектор  $\vec{E}$  напруженості електричного поля в точці з радіус-вектором  $\vec{r}$ . Початок відліку  $O$  знаходиться посередині між

зарядами. Дослідити граничні випадки: а) поле на малій відстані,  $r \ll \ell$ ; б) поле на великій відстані,  $r \gg \ell$ .

54. В вершинах квадрата з діагоналлю  $2\ell = 100$  мм знаходяться однакові по модулю ( $q = 2,5$  мкКл) точкові заряди, знаки яких при обході квадрату розташовані як  $+, +, -, -$ . Знайти напруженість  $E$  електричного поля в точці А, яка розташована на відстані  $x = 50$  мм від центра О квадрата симетрично відносно зарядів (див. Рис.19).

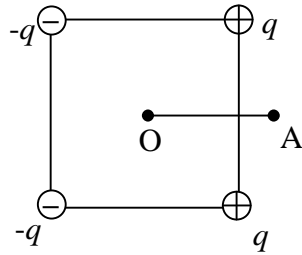


Рис. 19:

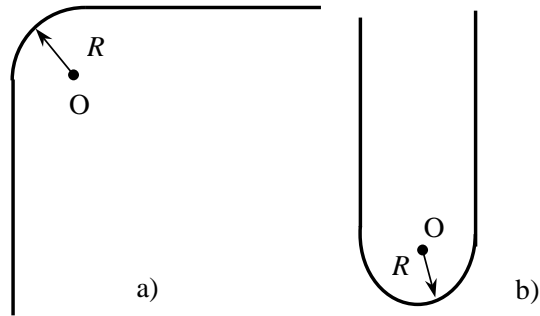


Рис. 20:

55. Тонкий стержень АВ довжини  $\ell = 100$  см має заряд  $q = 37$  нКл, розподілений вздовж стержня таким чином, що лінійна густина заряду квадратичним чином залежить від відстані до точки А. Знайти напруженість  $E$  електричного поля в точці А.
56. Напівнескінчений круглий циліндр радіуса  $R$  заряджено рівномірно по поверхні таким чином, що на одиницю його довжини припадає заряд  $\lambda$ . Знайти напруженість  $E$  електричного поля в центрі основи циліндра.
57. Знайти напруженість  $E$  електричного поля в центрі основи напівсфери, яка заряджена рівномірно з поверхневою густиною  $\sigma = 60$  нКл/м<sup>2</sup>.
58. Нескінчена площина з круглим отвором радіуса  $R$  заряджена рівномірно з поверхневою густиною  $\sigma$ . Знайти напруженість  $E$  електричного поля на осі отвору як функцію відстані  $\ell$  до його центру.
59. Тонке непровідне кільце радіуса  $R$  заряджено з лінійною густиною  $\lambda = \lambda_0 \cos \phi$ , де  $\lambda_0 = \text{const}$ ,  $\phi$  – азимутальний кут. Знайти модуль напруженості електричного поля а) в центрі кільця; б) на осі кільця в залежності від відстані  $z$  до його центру. Дослідити отриманий вираз при  $z \gg R$ .

60. Тонкий прямий стержень довжини  $2\ell$  знаходиться в вакуумі і рівномірно заряджений до заряду  $q$ . Знайти модуль напруженості електричного поля як функцію відстані  $r$  від центра стержня до точки прямої, а) яка перпендикулярна стержню і проходить через його центр; б) співпадає з віссю стержня, якщо  $r > \ell$ . Дослідити отримані вирази при  $r \gg \ell$ .
61. Довга пряма нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною заряду  $\lambda$ . Знайти модуль і напрямок напруженості електричного поля в точці А, яка розташована на відстані  $y$  від нитки і лежить на перпендикулярі до нитки, який проходить через один з її кінців.
62. Рівномірно заряджена нитка з лінійною густиною заряду  $\lambda$ , має конфігурації, зображені на Рис.20. знайти модуль напруженості електричного поля в точці О для обох конфігурацій. *Вказівка:* скористатися результатами задачі 61.
63. Дві перехрещені взаємно перпендикулярні нитки нескінченної довжини заряджені рівномірно з лінійною густиною  $\lambda$ . Знайти силу їх взаємодії.

## В Вступ до електродинаміки: математичний апарат

### Теоретичний довідник

- 1) Якщо *кожній* точці  $\vec{r}$  простору поставлено у відповідність одне і тільки одне значення деякої величини  $C(\vec{r})$  (векторної, скалярної), то кажуть, що в просторі визначене **поле**  $C(\vec{r})$ .
- 2) **Еквіпотенціальна поверхня** (поверхня рівня): визначена для скалярного поля  $C(\vec{r})$  (потенціалу) рівнянням

$$C(x, y, z) = \text{const.}$$

- 3) **Векторна** (“силова”) **лінія** векторного поля  $\vec{C}(\vec{r})$ : крива, в кожній точці якої дотична співпадає з напрямком поля в цій точці, визначається рівняннями:

$$\frac{dx}{C_x} = \frac{dy}{C_y} = \frac{dz}{C_z}.$$

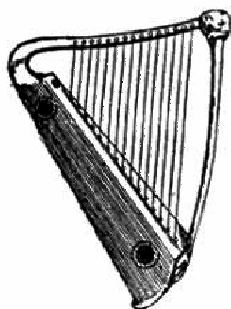


Рис. 21: Давньоасирійська арфа

- 4) Диференціальний оператор *набла* (оператор Гамільтона): Знак *набла* не є літерою алфавіту. Це позначення було введено в 1853 р. ірландським математиком В.Р. Гамільтоном і отримало свою назву “набла” за схожість з формою давньоасирійської арфи (див. Рис. 21).

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

- 5) Оператор Лапласа (лапласіан):

$$\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- 6) Градієнт скалярної функції  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ :

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

- 7) Похідні від скалярної або векторної функції (...) за напрямком деякого вектора  $\vec{a}$  дорівнюють

$$(\vec{k}_a \cdot \vec{\nabla})(\dots) = \left( \vec{k}_{ax} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{k}_{ay} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}_{az} \frac{\partial}{\partial z} \right) (\dots),$$

де

$$\vec{k}_a \equiv \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$



8) Дивергенція вектора  $\vec{A}$  (в декартовій системі координат):

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{div} (\varphi \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{A}, \quad \text{де } \varphi = \varphi(\vec{r}).$$

9) Ротор вектора  $\vec{A}$  (в декартовій системі координат):

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Тут

$$\nabla_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \vec{A}) = \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi \times \vec{A}, \quad \text{де } \varphi = \varphi(\vec{r}).$$

**! Зауваження:** часто для позначення оператора  $\vec{\nabla}$  використовується символ

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}, \quad \text{тобто} \quad \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}};$$

тоді, наприклад,

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{A}, \quad \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \times \vec{A} \quad \text{і т. д.}$$

10) Ротор градієнта скалярної функції:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = 0.$$

11) Дивергенція ротора вектора:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

12) Дивергенція векторного добутку:

$$\operatorname{div} (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}.$$

13) Ротор від ротора:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

14) Ротор векторного добутку:

$$\text{rot } (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}).$$

15) Градієнт скалярного добутку векторів:

$$\text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

16) Деякі похідні з оператором “набла”:

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{де } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$(\vec{C} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{C}; \quad \vec{\nabla} F(\varphi) = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{\nabla} \varphi; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\varphi) = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} \cdot \vec{\nabla} \varphi;$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(\varphi) = \vec{\nabla} \varphi \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi}; \quad (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\varphi) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial \varphi} (\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \varphi).$$

Тут скрізь  $\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ .

17) Циліндричні координати  $\rho, \varphi, z$  (див. Рис.22):  $x = \rho \cos \varphi$ ,  
 $y = \rho \sin \varphi, z = z, \varphi \in [0, 2\pi]$ .

Елемент об'єму в циліндричних координатах:  $dV = \rho d\rho d\varphi dz$ .

Елемент циліндричної поверхні:  $dS = \rho d\varphi dz$ .

Диференціальні операції в циліндричній системі координат:

$$a) \quad \text{grad } \psi = \vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z;$$

$$b) \quad \text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$c) \quad \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix};$$

$$d) \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

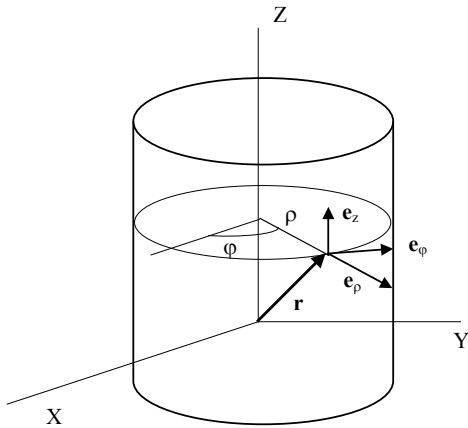


Рис. 22: Циліндричні координати

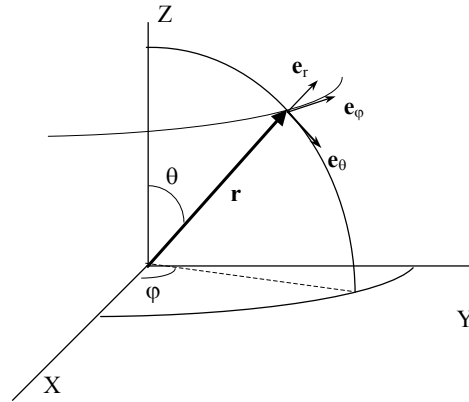


Рис. 23: Сферичні координати

- 18) Сферичні координати  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  (див. Рис. 23):  $x = r \cos \phi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \phi \cos \theta$ ,  $z = r \sin \theta$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ .

Елемент об'єму в сферичних координатах:  $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ .

Елемент сферичної поверхні:  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ .

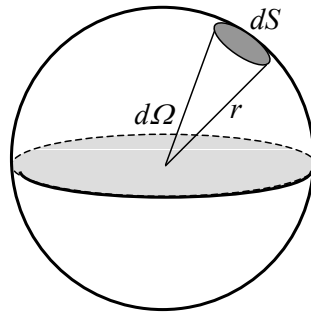


Рис. 24: Тілесний кут

*Тілесний кут* – частина простору, обмежена незамкненою поверхнею (див. Рис. 24). *Міра* тілесного кута з вершиною в центрі сфери – відношення площі сферичної поверхні, на яку він спирається, до квадрата радіусу сфери.

Елемент тілесного кута:  $d\Omega = dS/r^2 = \sin \theta d\theta d\phi$ .

Одиниця тілесного кута — стерadian (кут, під яким видно площину  $\Delta S = r^2$ ).

Диференціальні операції у сферичній системі координат:

$$\text{a) } \operatorname{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi;$$

$$\text{b) } \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right);$$

$$\text{c) } \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix};$$

$$\text{d) } \nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \nabla_{\theta\varphi}^2 \psi,$$

тут

$$\nabla_{\theta\varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

- 19) Теорема Остроградського-Гаусса: потік векторного поля  $\vec{A}$  через довільну замкнену поверхню  $S$  дорівнює потрійному інтегралу від  $\operatorname{div} \vec{A}$ , який беруть по об'єму  $V$ , який обмежує ця поверхня.

$$\oint_S \vec{n} \cdot \vec{A} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV.$$

Тут  $\vec{n}$  — одиничний вектор зовнішньої нормалі до замкненої поверхні  $S$ .

- 20) Теорема Стокса: циркуляція векторного поля  $\vec{A}$  вздовж замкненого контура  $\mathcal{L}$  дорівнює потоку вихора цього вектора через довільну поверхню  $S$ , що „спирається” (або „натягнута”) на цей контур. Напрямок вектора  $\vec{n}$  нормалі до цієї поверхні пов'язаний з напрямком обходу контура  $\mathcal{L}$  правилом правого гвинта.

$$\oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Тут використано таке широковживане позначення:  $d\vec{S} = \vec{n} dS$ .

## 1. Лінії поля. Інтегральні характеристики векторних полів

64. Знайти поверхні рівня скалярного поля, зобразити їх графічно ( $\vec{b}, \vec{c} = \text{const}$ ):
- а)  $C(x, y, z) = x^2 + y^2$ ; б)  $C(x, y, z) = x^2 - y^2$  в)  $C(\vec{r}) = (\vec{c} \cdot \vec{r})^2$ .
- д)  $C(\vec{r}) = r^2(\vec{c} \cdot \vec{r})$ ; е)  $C(\vec{r}) = (\vec{b} \times \vec{r}) \cdot (\vec{c} \times \vec{r})$ .
65. Знайти поверхні рівня потенціала електростатичного поля  $\phi(x, y, z) = kq/r$ , де  $k$  – стала,  $q$  – заряд,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
66. Знайти векторні лінії поля а) тяжіння  $\vec{F} = Gm\vec{r}/r^3$ ; б)  $\vec{C} = \vec{r}/r$ .
67. Знайти векторну лінію поля  $\vec{C} = x^3\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ , що проходить через точку з координатами (1, -1, 1).
68. Знайти векторні лінії поля ( $a, b, c = \text{const}$ ):
- а)  $\vec{E} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ; б)  $\vec{E} = y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$ ; в)  $\vec{A} = (y+z)\vec{e}_x - x\vec{e}_y - x\vec{e}_z$ ;
- д)  $\vec{B} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$ ; е)  $\vec{A} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$ ; ф)  $\vec{C} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y + a\vec{e}_z$ .
69. Обчислити потік векторного поля  $\vec{A} = 4xy\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$  через поверхню одиничного куба ( $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ ).
70. Обчислити потік векторного поля  $\vec{E} = a\vec{r}$  ( $a = \text{const}$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$ ) через а) напівсферу з центром на початку координат; б) бокову поверхню циліндра, центр якого знаходиться на початку координат. Параметри фігури вважати відомими.
71. Чому дорівнює а)  $\vec{\Psi} = \oint_S d\vec{S}$ , б)  $\vec{K} = \oint_C d\vec{\ell}$ ?
72. Два точкових заряди  $+q$  і  $-q$  розташовані на відстані  $2a$  один від одного. Знайти потік вектора напруженості електричного поля через коло радіуса  $R$  (див. Рис.25).
73. Рівномірно заряджена дуже довга нитка розташована вздовж осі кола радіуса  $R$ . Один кінець нитки співпадає з центром кола. Заряд нитки на одиницю довжини дорівнює  $\lambda$ . Знайти потік вектора напруженості електричного поля  $\vec{E}$  через площу кола (див. Рис.26).
74. Обчислити інтеграл  $\int_C \vec{r} d\vec{\ell}$  радіус-вектора вздовж одного витка АВ гвинтової лінії  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ . Точки А і В відповідають значенням параметра  $t = 0$  і  $2\pi$ .

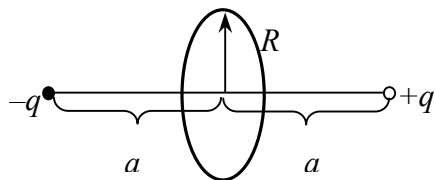


Рис. 25:

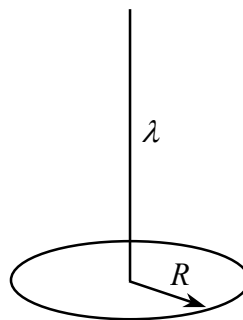


Рис. 26:

75. Показати, що циркуляція поля  $\vec{B} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$  вздовж довільної замкненої кривої, дорівнює  $2S$ , де  $S$  – площа поверхні в площині  $xy$ , обмежена цією кривою.
76. Обчислити потік вихора поля  $\vec{A} = 4xz\vec{e}_x + yz\vec{e}_z - y^2\vec{e}_y$  через поверхню напівсфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ , яка знаходиться над площиною  $xy$ .
77. Точковий заряд  $q$  розташований в центрі куба з ребром  $b$ . Чому дорівнює потік вектора  $\vec{E}$  через одну з граней куба?
78. Точковий заряд  $q$  розташований в одній з вершин куба з ребром  $b$ . Чому дорівнює потік вектора  $\vec{E}$  через кожну з граней куба? *Вказівка:* побудувати симетричну фігуру (яка складається з кубів) таким чином, щоб заряд  $q$  знаходився в центрі.
79. Напруженість електричного поля залежить тільки від координат  $x$  та  $y$  по закону  $\vec{E} = a(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)/(x^2 + y^2)$ , де  $a$  – стала,  $\vec{e}_x$  та  $\vec{e}_y$  – орти осей  $x$  та  $y$ . Знайти потік вектора  $\vec{E}$  через сферу радіуса  $R$  з центром на початку координат.
80. Квадратна рамка зі стороною  $a$  знаходиться в одній площині з прямолінійним провідником зі струмом  $I$ . На якій відстані  $r$  від провідника розташована найближча сторона рамки, якщо потік магнітного поля через площину рамки дорівнює  $\Phi_0$ ?

## 2. Диференціальні характеристики векторних полів. Теорема Гаусса і Стокса

Приклади обчислення ( $\vec{a} = \text{const}$ ):

$$\text{grad}(\vec{a}, \vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{a}, \vec{r}) = \vec{\nabla}(a_x x + a_y y + a_z z) = (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) = \vec{a},$$

$$\text{grad } r = \vec{\nabla} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\text{div} \vec{r} = (\vec{\nabla}, \vec{r}) = \nabla_x x + \nabla_y y + \nabla_z z = 3,$$

$$\text{rot}[\vec{a} \times \vec{r}] = \vec{\nabla} \times [\vec{a} \times \vec{r}] = \vec{a}(\vec{\nabla}, \vec{r}) - (\vec{a}, \vec{\nabla})\vec{r} = 2\vec{a}.$$

81. Силове поле має потенціал  $\phi = axy$  ( $a = \text{const}$ ). Знайти напруженість поля та його векторні лінії.
82. Обчислити потік поля  $\vec{E}$  через сферу радіуса  $R$  з центром на початку координат ( $a = \text{const}$ ):

$$\text{a) } \vec{E} = a(xy^2\vec{e}_x + yz^2\vec{e}_y + zx^2\vec{e}_z),$$

$$\text{b) } \vec{E} = a(x^3\vec{e}_x + y^3\vec{e}_y + z^3\vec{e}_z),$$

$$\text{c) } \vec{E} = \frac{a(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задачу розв'язати двома способами: безпосереднім обчисленням інтегралу по поверхні (в сферичних координатах) та за допомогою теореми Гаусса.

83. Знайти  $\text{rot}$  і  $\text{div}$  таких полів ( $\vec{a}, \vec{b}, \vec{\omega} = \text{const}$ ):

$$1) \vec{r}/r;$$

$$2) \vec{E} = b\vec{r}/r^3;$$

$$3) \vec{B} = a\vec{r} \times \vec{e}_z/r^2;$$

$$4) \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

84. Знайти

$$1) \text{grad}|\vec{r}|;$$

$$2) \text{div}(\psi(r^2; t)\vec{r}/r).$$

85. Показати, що

$$1) \text{ поле } \vec{B} = \vec{\nabla}\psi \times \vec{\nabla}\phi - \text{вихрове};$$

$$2) \text{rot}(\psi(r^2; t)\vec{r}/r) = 0;$$

$$3) \text{ якщо поля } \vec{A}, \vec{B} - \text{безвихрові, то поле } (\vec{A} \times \vec{B}) - \text{вихрове};$$

$$4) \text{rot grad}\phi = 0; \text{div rot}\vec{A} = 0;$$

- 5) якщо  $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$  і  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , то  $\vec{B} = \text{const.}$   
 6) якщо  $\vec{v} = \vec{e}_x v_x(x, y) + \vec{e}_y v_y(x, y)$ , то  $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ ;  
 7)  $\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \psi) \cdot \vec{A} + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ;  
 8)  $\vec{\nabla} \times (\psi \vec{A}) = (\vec{\nabla} \psi) \times \vec{A} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ;  
 9)  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$ ;  
 10)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ ;  
 11)  $(\vec{k} \cdot \vec{\nabla})\vec{r} = \vec{k}$ .

86. Обчислити  $\text{div}$  та  $\text{rot}$  таких векторних полів:

- 1)  $F_x = x + y, F_y = -x + y, F_z = -2z$ ;  
 2)  $H_x = 2y, H_y = 2x + 3z, H_z = 3y$ ;  
 3)  $G_x = x^2 - z^2, G_y = 2, G_z = 2xz$ ;  
 4)  $a\mathbf{r}, \omega \times \mathbf{r}$ , де стала  $a$  та вектор  $\omega$  не залежать від просторових координат;  
 5)  $E_x = 6xy, E_y = x^2 - y^2, E_z = 0$ ;  
 6)  $\vec{F} = \vec{r} \exp(-\lambda r)(1 + \lambda r)/r^3$ .

87. Обчислити:

$$\text{a) } \text{grad} \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \right), \quad \text{b) } \text{rot} \left( \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3} \right),$$

де  $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{a} = \text{const.}$

88. Показати, що якщо  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t)$ , то векторне поле  $\vec{a} = d\vec{v}/dt$  має потенціал. Знайти цей потенціал.  
 89. Обчислити  $\text{div}$  та  $\text{rot}$  поля сили: а) тяжіння (гравітаційної); б) відцентрової та Копіоліса ( $\vec{\omega} = \text{const}$ ); в) сили Лоренца, що діє на точковий заряд з боку однорідних полів  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$ . Які з цих полів є гармонічними, потенціальними, вихровими?  
 90. Поле  $\vec{B}$  має вигляд:

$$\text{a) } \vec{B} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y; \quad \text{b) } \vec{B} = \frac{a(y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Знайти і зобразити лінії поля  $\vec{B}$  в площині  $xy$ . Знайти  $\text{rot } \vec{B}$ , вказати, як він спрямований відносно поля  $\vec{B}$ ? Знайти циркуляцію  $\Gamma_B = \oint_{\mathcal{L}} \vec{B} d\vec{\ell}$  вздовж замкненої кривої  $\mathcal{L} : x^2 + y^2 = 1, z = 0$ . Показати, що для цього поля виконується теорема Стокса.

91. Обчислити (безпосередньо та за допомогою теореми Стокса) циркуляцію по колу радіуса  $R$  поля  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \text{const}$  в площині, яка перпендикулярна до вектора  $\vec{\omega}$ .
92. Знайти напруженість  $\vec{E}$  електричного поля, потенціал якого дорівнює  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d} = \text{const}, \vec{r} = (x, y, z))$

a)  $\varphi = (\vec{a}, [\vec{b} \times \vec{r}]);$     b)  $\varphi = [\vec{a} \times \vec{r}] \cdot [\vec{b} \times \vec{r}];$     c)  $\varphi = (\vec{a}, \vec{r}) \cos(\vec{b}, \vec{r});$

d)  $\varphi = \frac{(\vec{d}, \vec{r})}{r^3};$     e)  $\varphi = f(r)F(r);$     f)  $\varphi = F(f(\vec{a}, \vec{r})).$

93. Обчислити потік вектора  $\vec{E} = a\vec{r}$  ( $\vec{r} = (x, y, z)$ ,  $\vec{a} = \text{const}$ ) через довільну замкнену поверхню, що обмежує об'єм  $V$ .
94. \* Чи відрізняються вирази для градієнта  $\vec{\nabla}\phi$ , дивергенції,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ , та ротора,  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ , в правій та лівій системах координат, якщо  $\vec{A}$  – вектор (полярний) або псевдовектор (аксіальний вектор)? Записати відповідні вирази для правої та лівої системи координат. Які відомі в фізиці величини відносяться до векторів? псевдовекторів?
95. \* Чи можливо ввести операції скалярного та векторного добутку векторів  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$ ,  $\text{rot}$  для простору розмірності  $n = 2$ ? Отримати відповідні формули. Для яких розмірностей простору є змістовними поняття гармонічних, потенціальних та вихрових полів, теореми Гаусса та Стокса?
96. Показати, що

1)  $\oint_S \vec{A} \times d\vec{S} = - \int_V \text{rot } \vec{A} dV;$

2)  $\oint_S \varphi d\vec{S} = \int_V \text{grad } \varphi dV;$

3)  $\oint_S \text{grad } \varphi \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}^2 \varphi dV.$

97. Чи є гармонічним (тобто, чи задовольняє рівнянню Лапласа) поле  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $g(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $h(x, y) = \sin kx \cosh ky$ ? Відповідь обґрунтувати.

98. Вода тече вздовж каналу, ширина якого 50 м. Швидкість води залежить від відстані  $y$  до центру каналу як  $v = v_0(1 - y^2/b^2)$ , де  $v_0=5$  м/с - швидкість в центрі,  $2b$  - ширина каналу. Дротинка довжиною  $l=10$  см пливе а) по центру каналу; б) на відстані 10 м від центру. Чи буде дротинка обертатися? Чому? На яку відстань  $L$  віднесе течія дротинку за час  $T$  одного оберту?
99. Знайти  $\text{rot } \vec{B} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$  і вказати його напрямок. Обчислити циркуляцію вектора  $\vec{B}$  вздовж замкненої кривої  $\mathcal{L} : x^2 + y^2 = 1, z = 0$  і порівняти із потоком вектора  $\text{rot } \vec{B}$  через плоску поверхню, натягнуту на контур  $\mathcal{L}$ .

## С Рівняння Максвелла в вакуумі. Вектор Пойнтинга

### Теоретичний довідник

Рівняння Максвелла в інтегральній формі:

$$\oint_S (\vec{E}\vec{n})dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}\vec{n}dS,$$

де  $Q = \sum_{i=1}^N q_i$  або  $Q = \int_V \rho dV$ ,

$$\oint_S (\vec{B}\vec{n})dS = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{B}d\vec{\ell} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \vec{E}\vec{n}dS,$$

де  $I = \sum_{i=1}^N I_i$  або  $I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n}dS$ .

Рівняння Максвелла в диференціальній (локальній) формі:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{або} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

або в декартових координатах  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}.$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{або} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

або покомпонентно:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \text{або} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \text{або} \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

або покомпонентно:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Закон збереження заряду в диференціальній (локальній) формі:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \rho \vec{v}.$$

Рівняння Максвелла для електромагнітних хвиль:

$$\oint_S (\vec{E} \vec{n}) dS = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0,$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \vec{n} dS, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\oint_S (\vec{B} \vec{n}) dS = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{B} d\vec{\ell} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \vec{n} dS, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Вектор густини потоку енергії електромагнітного поля (вектор Пойнтинга):

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}.$$

Закон збереження енергії електромагнітних систем в інтегральній формі:

$$-\frac{d}{dt} \int_V u dV = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV + \oint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S},$$

де об'ємна густина енергії електромагнітного поля:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 B^2.$$

В диференціальній (локальній) формі:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \vec{\Pi}, \quad \Pi = u c \vec{n}.$$

Об'ємна густина імпульсу електромагнітного поля:

$$\vec{g} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}, \quad \vec{g} = \frac{u}{c} \vec{n}.$$

Момент імпульсу електромагнітного поля

$$\vec{M} = \int_V \vec{r} \times \vec{g} dV = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{r} \times \vec{\Pi} dV.$$

100. Показати, що розмірність  $[\varepsilon_0 E^2] = [B^2 / \mu_0] = \text{Дж} / \text{м}^3$ .
101. Показати, що розмірність вектора Пойнтинга  $[\varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}] = \text{Дж} / (\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .
102. Показати, що енергія зарядженої сфери дорівнює

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{2R},$$

де  $Q$  - заряд,  $R$  - радіус сфери.

103. Точковий заряд  $q$  рухається з нерелятивістською швидкістю  $\vec{v} = \text{const}$ . Знайти густину струму зміщення  $\vec{j}_{\text{sh}}$  в точці, яка знаходиться на відстані  $r$  від заряду на прямій а) що співпадає з траєкторією заряду; б) яка перпендикулярна до траєкторії та проходить через заряд.
104. Дві частки з однаковими масами  $m$  та зарядами  $q$  і  $-q$  рухаються під дією сили електричного притягання таким чином, що пряма, яка їх з'єднує, обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ . Знайти густину струму зміщення  $\vec{j}_{\text{sh}}$  в центрі цієї системи.

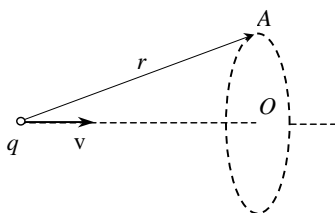


Рис. 27:

105. Точковий заряд  $q$  рухається із нерелятивістською швидкістю  $\mathbf{v} = \text{const}$ . Користуючись теоремою про циркуляцію вектора  $\mathbf{B}$  вздовж пунктирного кола (Рис. 27), знайти  $\mathbf{B}$  в точці  $A$  як функцію радіус-вектора  $\mathbf{r}$  та швидкості  $\mathbf{v}$ .
106. Показати, що рівняння Максвелла узгоджуються з законом збереження електричного заряду, тобто

$$\text{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

107. Показати, що рівняння Максвелла  $\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$  і  $\text{div} \vec{B} = 0$  сумісні, тобто, якщо функції  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  задовільняють першому рівнянню, то  $\text{div} \vec{B} = 0$ .
108. В деякій області інерціальної системи відліку існує магнітне поле з індукцією  $\vec{B}$ , що обертається із постійною кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Знайти  $\text{rot} \vec{E}$  в цій області як функцію векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{B}$ .
109. Напруженість  $\vec{E}$  аксіально-симетричного електричного поля залежить від відстані  $\rho$  до його осі як  $\vec{E} = a\vec{\rho}/\rho^2$ , де  $a$  – стала. Знайти заряд всередині сфери радіуса  $R$  з центром на осі поля.
110. Плоский конденсатор з круглими паралельними пластинами повільно заряджають. Показати, що потік вектора Пойнтинга через бокову поверхню конденсатора дорівнює зміні (збільшенню) енергії конденсатора за одиницю часу. При розрахунках крайовими ефектами на границях конденсатора знехтувати.
111. Непровідний циліндр маси  $m$  і радіуса  $R$  зарядили до заряду  $Q$  і підвісили на нитці в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$ . Знайти кутову швидкість циліндру після того, як поле вимкнули. Вектор індукції поля спрямований вертикально, заряд рівномірно розподілений по поверхні циліндра, опором повітря знехтувати.

112. Вздовж прямого провідника з круглим перерізом тече сталий струм  $I$ . Знайти потік вектора Пойнтинга через бокову поверхню ділянки даного провідника, який має опір  $R$ .
113. Нерелятивістські протони, прискорені різницею потенціалів  $U$ , утворюють пучок круглого перерізу із струмом  $I$ . знайти модуль і напрям вектора Пойнтинга поза пучком на відстані  $r$  від його осі.
114. Струм, що протікає по обмотці довгого прямого соленоїда, повільно збільшують. Показати, що швидкість зростання енергії магнітного поля в соленоїді дорівнює потоку вектора Пойнтинга через його бокову поверхню.
115. Користуючись рівняннями Максвелла для електростатики обчислити:
- 1) Поле рівномірно зарядженої кулі радіуса  $R$  всередині та назовні. Питома густина заряду  $\rho$ . Зобразити графічно залежність поля від відстані до центра кулі.
  - 2) Поле рівномірно зарядженої нескінченної нитки. Питома густина заряду на одиницю довжини нитки  $\lambda$ .
  - 3) Поле рівномірно зарядженої нескінченної площини. Питома густина заряду на одиницю площини  $\sigma$ .
  - 4) Поле всередині та зовні плоского конденсатора з питомою густиною заряду на кожній із пластин  $\sigma$ .
116. Користуючись рівняннями Максвелла обчислити магнітне поле навколо довгого прямолінійного провідника зі стаціонарним струмом  $I$ .
117. Користуючись рівняннями Максвелла обчислити магнітне поле всередині соленоїда зі стаціонарним струмом  $I$ . Соленоїд складається із  $N$  витків. Крайовими ефектами знехтувати.
118. Показати, що наведене нижче поле задовольняє рівнянням Максвелла для електростатики:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

Тут  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

119. Показати, що наведене нижче поле задовольняє рівнянням Максвелла для магнітостатики:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'.$$

Тут  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

120. Показати, що вираз

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

задовольняє кулонівському калібруванню. Тут  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

121. Сталій струм з об'ємною густиною  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$  тече в скінченному об'ємі  $V$ , який граничить з вакуумом. Функція  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$  неперервна всередині даного об'єму всюди, включаючи точки поверхні. Довести, що  $\int_V \vec{j} dV = 0$ .

122. Перехід від векторного потенціала  $\vec{A}$  до нового векторного потенціала  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f$ , де  $f = f(\vec{r})$  – неперервна функція координат, не змінює індукції стаціонарного магнітного поля. Якій умові повинна задовольняти функція  $f(\vec{r})$ , щоби вказаний перехід не порушував також кулонівського калібрування векторного потенціалу в магнітостатиці?

123. \* Користуючись властивістю  $\delta$ -функції, знайти розподіл в просторі об'ємної густини  $\vec{j}$  струму для таких випадків:

- 1) вздовж осі  $z$  в додатному напрямку тече струм  $I$ ;
- 2) в площині  $xy$  тече струм з поверхневою густиною  $\vec{i}_0 = \text{const}$ .

124. Струм  $I$  тече по тонкому замкненому контуру  $\mathcal{L}$ . Довести, що для обчислення індукції  $\vec{B}$  магнітного поля струму за межами лінії контуру можна ввести скалярний потенціал  $\Phi$  згідно з формулою  $\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Знайти рівняння та додаткові умови, які визначають  $\Phi$ .

125. Обґрунтувати відповіді на такі запитання:

- 1) Чи може існувати всередині порожньої області змінне за часом електричне поле без магнітного?
- 2) Чи може існувати змінне за часом магнітне поле без електричного?

- 3) Чи може існувати однорідне електричне поле за наявності змінного за часом магнітного поля?
- 4) Чи може однорідне електричне (або магнітне) поле бути змінним у часі?
126. Показати, що сферично симетричні електричне та магнітне поля не можуть бути змінними за часом.
127. \* Показати, що вектор Пойнтинга не єдиний вектор, дивергенція якого дорівнює виразу  $\varepsilon_0 c^2 (\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B})$ .
128. Виходячи з рівнянь Максвелла знайти вирази для полів  $\vec{B}$  та  $\vec{E}$  через потенціали  $\vec{A}$  і  $\varphi$ . Записати рівняння Максвелла для потенціалів за умови калібрування а) Кулона; б) Лоренца.
129. Векторний потенціал  $\vec{A}$  магнітного поля має вигляд  $\vec{A} = \vec{b}F(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ , де  $\omega = |\vec{k}|c$ ,  $\vec{b} = \text{const}$ ,  $F$  – диференційована функція своїх аргументів. Визначити вектор  $\vec{P}$  Пойнтинга та густину  $W$  енергії електромагнітного поля при такому калібруванні:  $\varphi = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$
130. Показати, що електромагнітне поле

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \cos(y - ct), \quad B_x = \cos(y - ct), \quad B_y = B_z = 0$$

задовольняє рівнянням Максвелла.

131. Для заданого однорідного електричного поля з напруженістю  $\vec{E}$  введено таке калібрування:  $\varphi = 0$ ,  $\vec{A} \neq 0$ . Знайти векторний потенціал  $\vec{A}$ .
132. Знайти напруженість електричного поля, для якого скалярний потенціал  $\varphi = 0$ , а векторний потенціал змінюється з часом за законом  $\vec{A} = \vec{b}t$ , де  $\vec{b} = \text{const}$ .
133. Знайти скалярний та векторний потенціали  $(\varphi, \vec{A})$  магнітного поля  $\vec{B} = k(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$ ,  $k = \text{const}$ .
134. \* Всередині нескінченно довгого циліндра радіуса  $R$  паралельно його осі тече однорідний струм з об'ємною густиною  $\vec{j}$ . Користуючись інтегральною формою рівнянь Максвелла знайти індукцію магнітного поля  $\vec{B}$  всередині та ззовні циліндра. За допомогою співвідношення  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  знайти векторний потенціал  $\vec{A}$  магнітного поля. При калібруванні векторного потенціала прийняти, що він дорівнює нулю на поверхні циліндра.



135. Плоский конденсатор з круглими пластинами радіуса  $R$  під'єднаний до джерела постійної сторонньої ЕРС  $\mathcal{E}_{ex}$ . Відстань між пластинами повільно змінюється за гармонічним законом  $d = d_0 + \Delta \sin \omega t$ . Знайти індукцію магнітного поля між пластинами, яка утворюється струмами зміщення. Показати, що зміна енергії поля між пластинами дорівнює потоку його енергії через бокову поверхню. Зробити рисунок, вказати напрямки струмів і полів. Крайовими ефектами знехтувати.
136. Середовище між обкладинками плоского конденсатора має діелектричну проникність  $\varepsilon$  і має невелику електричну провідність  $\gamma$  (неідеальний діелектрик). Ємність конденсатора  $C$ . На обкладинки конденсатора подають різницю потенціалів  $U$ , після чого їх ізолюють. Знайти закон зміни з часом величини заряду на кожній з обкладинок конденсатора та струм зміщення, який протікає через конденсатор. Зробити рисунок, вказати напрямки струмів та полів. Крайовими ефектами знехтувати.
137. Простір між нескінченно довгими коаксіальними ідеально провідними циліндрами радіусів  $a$  і  $b$  заповнили речовиною з провідністю  $\sigma(r) = \alpha r^n$ , де  $r$  – відстань до осі. Потенціали  $\varphi(a) = U$ ,  $\varphi(b) = 0$ . Знайти розподіл потенціала між циліндрами.
138. В сферичних координатах дві компоненти векторного потенціалу дорівнюють нулю:  $A_r = A_\theta = 0$ , а третя визначається співвідношеннями

$$A_\varphi = ar \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \sin \theta, \quad \text{при } r \leq R$$

$$A_\varphi = \frac{2aR^5}{15r^2} \sin \theta, \quad \text{при } r \geq R,$$

де  $a$ ,  $R$  – сталі. Знайти розподіл об'ємної густини  $\vec{j}$  струму, який створив магнітне поле з таким потенціалом.

139. В циліндричних координатах дві компоненти векторного потенціалу дорівнюють нулю:  $A_r = A_z = 0$ , а третя визначається співвідношеннями

$$A_\varphi = ar \left( R^2 - \frac{r^2}{2} \right), \quad \text{при } r \leq R$$

$$A_\varphi = \frac{aR^4}{2r} \sin \theta, \quad \text{при } r \geq R,$$

де  $a, R$  – сталі. Знайти розподіл об'ємної густини  $\vec{j}$  струму, який створив магнітне поле з таким потенціалом.

140. \* В сферичних координатах дві компоненти векторного потенціалу дорівнюють нулю:  $A_r = A_\theta = 0$ , а третя визначається співвідношеннями

$$A_\varphi = ar \sin \theta, \quad \text{при } r \leq R$$

$$A_\varphi = \frac{aR^3}{r^2} \sin \theta, \quad \text{при } r \geq R,$$

де  $a, R$  – сталі. Знайти розподіл поверхневої густини  $\vec{i}$  струму, який створив магнітне поле з таким потенціалом.

## Д Електростатика і магнітостатика в вакуумі

### Теоретичний довідник

Рівняння Максвелла для електростатики в вакуумі в інтегральній формі:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

В диференціальній (локальній) формі:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

Рівняння Пуассона в загальному вигляді:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{де } \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi.$$

Рівняння Пуассона в декартових координатах:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0},$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Зв'язок між потенціалом  $\varphi$  електричного поля і напруженістю  $\vec{E}$  в інтегральній формі (див. Рис. 28):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \varphi(\vec{r}) = - \int_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + const.$$

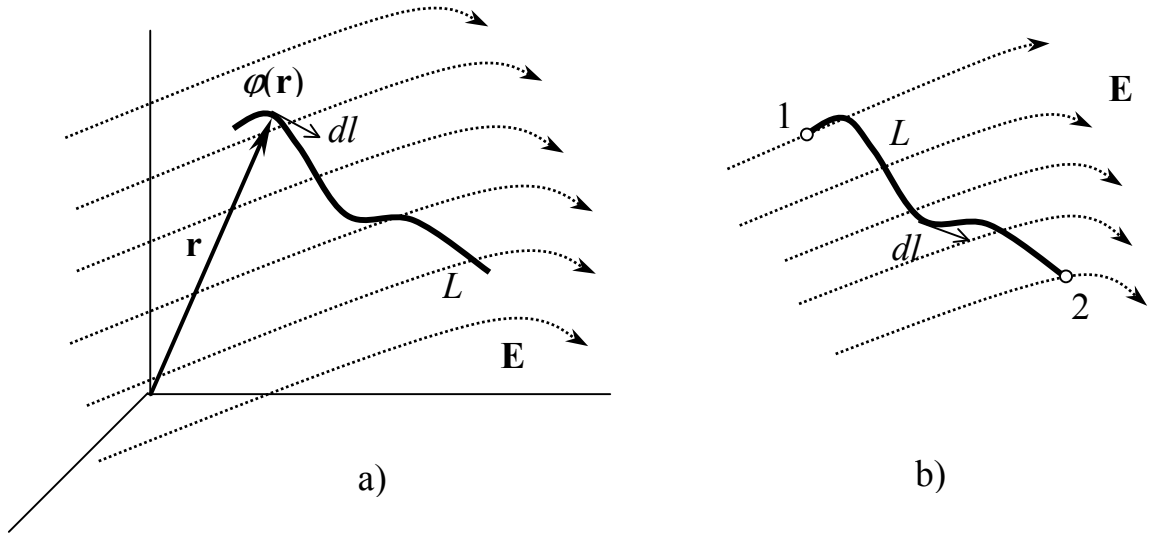


Рис. 28: Обчислення потенціалу електростатичного поля.

Рівняння Максвелла для магнітостатики в вакуумі в інтегральній формі:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I,$$

В диференціальній (локальній) формі:

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Векторний потенціал магнітного поля  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ :  $\vec{B} = \text{rot } A$ , або  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . В декартових координатах:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Векторне рівняння Пуассона для магнітостатики:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = -\mu_0 \vec{j},$$

або покомпонентно:

$$\vec{\nabla}^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \vec{\nabla}^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \vec{\nabla}^2 A_z = -\mu_0 j_z.$$

Тут використана умова  $\text{div } \vec{A} = 0$  (Кулонівське калібрування).

## 1. Електростатика в вакуумі

141. Куля радіуса  $R$  заповнена електричним зарядом, який однорідно розподілений по об'єму з густиною  $\rho$ . Знайти напруженість  $\vec{E}$  і потенціал  $\varphi$  електричного поля всередині кулі та за її межами. Прийняти нормування  $\varphi(\infty) = 0$ .
142. Нескінчений циліндр радіуса  $R$  заповнений електричним зарядом, який однорідно розподілений по об'єму з густиною  $\rho$ . Знайти напруженість  $\vec{E}$  і потенціал  $\varphi$  електричного поля всередині циліндру та за його межами. Прийняти нормування  $\varphi(R) = 0$ .
143. Куля радіуса  $R$  заповнена електричним зарядом, розподіл якого сферично-симетричний, а густина залежить від відстані  $r$  до центра кулі як  $\rho(r) = ar^5$ , де  $a$  – стала. Знайти потік  $\Phi_E$  напруженості електричного поля через коло радіуса  $R$ , площина якого  $S$  в центральній точці дотикається кулі (див. Рис. 29).

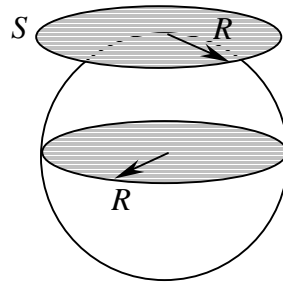


Рис. 29:

144. Три електрони в стані спокою розміщені в вершинах правильного трикутника зі стороною  $\ell = 1$  см. Електрони починають рухатись під дією взаємного відштовхування. Розглянути релятивістський випадок і знайти їх граничну швидкість  $v$ . За яких відстаней  $\ell$  можна користуватись нерелятивістським наближенням?
145. Напруженість електричного поля від відстані  $r$  до початку координат визначається формулою

$$\vec{E} = e \frac{\vec{r}}{r^3} (1 + \lambda r) \exp(-\lambda r),$$

де  $e, \lambda$  – додатні сталі. Знайти розподіл об'ємної густини  $\rho(r)$  заряду, який створив це поле. Чому дорівнює повний заряд  $Q$ ?

146. Визначити розподіл об'ємної густини  $\rho$  заряду, який створює в просторі електричне поле з напруженістю  $\vec{E}$ , що дорівнює: а)  $\vec{E} = (\vec{b}, \vec{r})\vec{b}$ ; б)  $\vec{E} = gr\vec{r}$ ;

$$\text{в) } \vec{E} = \frac{e\vec{r}}{r^3} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{2r}{a} \left( 1 + \frac{r}{a} \right) \right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \right].$$

Тут  $a, \vec{b}, g, e$  – сталі.

147. Чи можна підібрати такий розподіл зарядів зовні порожнини, щоб всередині порожнини напруженість  $\vec{E}$  електростатичного поля мала вигляд ( $\vec{a}, \vec{b}, \vec{k} = \text{const}, \vec{r} = (x, y, z)$ ):

$$\text{а) } (\vec{b} \cdot \vec{r})\vec{a}; \quad \text{б) } (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{r}; \quad \text{в) } \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{r}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}).$$

148. Чи можна створити в просторі електростатичне поле з напруженістю  $\vec{E} = \vec{a} \times \vec{r}$ , де  $\vec{a} = \text{const}, \vec{r} = (x, y, z)$ ?
149. \* Визначити потенціал  $\varphi$  і напруженість  $\vec{E}$  електричного поля на осі тонкого диска радіуса  $R$ , рівномірно зарядженого з поверхневою густиною  $\sigma$ . Розглянути граничний випадок великої (порівняно з чим?) відстані і порівняти отриманий вираз з кулонівським потенціалом. Переконатися, що при переході через поверхню диска  $\vec{E}$  задовольняє необхідній граничній умові  $E_{2n} - E_{1n} = \sigma/\epsilon_0$ .
150. \* Визначити потенціал  $\varphi$  електричного поля в області  $x \geq 0$ , яка обмежена трьома площинами:  $x = 0, y = 0, y = b$ . Площина  $x = 0$  підтримується при однорідному потенціалі  $\varphi_0$ , а дві інші – при нульовому потенціалі. Всередині області заряди відсутні. Задачу вважати двовимірною.

151. \* В моделі атома Томсона припускали, що додатний заряд  $q$  розподілено всередині кулі радіуса  $R = 10^{-10}$  м. Як повинна залежати від відстані  $r$  до центра кулі об'ємна густина  $\rho$  заряду, щоб електрон (точковий заряд), розміщений в центрі кулі, міг виконувати гармонічні коливання? Знайти частоту  $\nu$  цих коливань.
152. Вздовж порожнього провідника, що має переріз в формі еліпса, тече струм  $I = 10$  А, знайти індукцію магнітного поля в фокусі еліпса, якщо велика та мала півосі дорівнюють  $a = 50$  см,  $b = 30$  см. *Вказівка:* Рівняння еліпса в полярній системі координат:  $r = p/(1 + e \cos \varphi)$ , де  $p = b^2/a$ .
153. Плазма утворює циліндр радіуса  $a$ , питома провідність якого залежить від відстані  $r$  до осі циліндра як  $\lambda = \lambda_0(1 - r^2/a^2)$ , до  $\lambda_0 = \text{const}$ . Вздовж циліндра тече сталий струм  $I$ . Знайти розподіл індукції магнітного поля  $B(r)$  всередині та назовні циліндра.
154. Система складається з рівномірно зарядженої сфери радіуса  $R$  та навколишнього середовища, яке заповнене зарядом таким чином, що потенціал поля має вигляд

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{r} - \frac{\alpha r}{\epsilon_0} \right),$$

де  $\alpha, b$  – сталі. Знайти заряд сфери, за якого напруженість  $E$  поля поза сферою не залежить від  $r$ . Чому дорівнює  $E$ , стала  $b$ ?

155. Знайти напруженість електричного поля в центрі кулі радіуса  $R$  з питомою густиною заряду  $\rho = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ , де  $\mathbf{a}$  – сталий вектор,  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор точки з центра кулі.
156. Знайти розподіл заряду  $\sigma(\theta)$  на поверхні сфери радіуса  $r$ , при якому поле всередині сфери однорідне і його напруженість дорівнює  $\vec{E}$ . Чому при цьому дорівнює поле зовні сфери?
157. Куля радіуса  $R$  має додатний заряд, об'ємна густина якого залежить від відстані  $r$  до її центра як  $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ , де  $\rho_0$  – стала. Знайти а) модуль  $E(r)$  напруженості електричного поля всередині та ззовні кулі як функцію  $r$ ; б) максимальне значення  $E_{\text{max}}$  модуля напруженості і відповідне значення  $r_{\text{max}}$ . Впливом речовини кулі знехтувати.
158. Система складається з кулі радіуса  $R$ , яка заряджена сферично-симетрично, і навколишнього середовища, заповненого зарядом з

об'ємною густиною  $\rho = \alpha/r$ , де  $\alpha$  – стала, а  $r$  – відстань до центра кулі. Знайти заряд кулі, при якому модуль напруженості  $E$  електричного поля ззовні кулі не залежить від  $r$ . Чому дорівнює  $E$ ? Впливом речовини знехтувати. Чи суттєво, як саме залежить від  $r$  густина заряду всередині кулі? Пояснити, чому.

159. Всередині кулі, яку заряджено рівномірно з об'ємною густиною  $\rho$ , знаходиться маленька сферична порожнина. Центр порожнини зміщено відносно кулі на вектор  $\vec{a}$ . Знайти вектор напруженості  $\vec{E}$  поля всередині порожнини. Впливом речовини кулі знехтувати.
160. Знайти вектор напруженості  $\vec{E}$  електричного поля в області перетину двох куль, які рівномірно заповнені зарядами протилежних знаків з об'ємною густиною  $\rho$  і  $-\rho$ , відповідно. Центри куль зсунуті на вектор  $\vec{a}$ .
161. Нескінченно довга пряма нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною  $\lambda = 0,40$  мкКл/м. Знайти різницю потенціалів в точках 1 і 2, якщо відстані від точок 2 і 1 до нитки відрізняються в  $\eta = 2,0$  разів.
162. Заряд  $q$  розподілений рівномірно по об'єму кулі радіуса  $R$ . Знайти потенціал електричного поля а) в центрі кулі; б) всередині кулі як функцію  $r$  до її центра. Впливом речовини кулі знехтувати.
163. Знайти напруженість  $\vec{E}$  електричного поля, потенціал якого має вигляд  $\varphi = (\vec{a}, \vec{r})$ , де  $\vec{a}$  – сталий вектор,  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки поля.
164. Визначити напруженість  $\vec{E}$  електричного поля, потенціал якого  $\varphi$  залежить від координат  $x, y$  за законом: а)  $\varphi = a(x^2 - y^2)$ ; б)  $\varphi = axy$ , де  $a$  – стала. Зобразити приблизний вигляд цих полів за допомогою ліній поля вектора  $\vec{E}$  в площині  $xy$ .
165. Простір між двома паралельними площинами  $x = a$  та  $x = -a$  заповнено зарядом, об'ємна густина якого залежить тільки від координати  $x$  як  $\rho = \alpha x$ , де  $\alpha$  – стала. Знайти залежність від  $x$  компоненти  $E_x(x)$  напруженості електричного поля. Зобразити цю залежність графічно.
166. Потенціал електричного поля має вигляд  $\varphi = \alpha(xy - z^2)$ , де  $\alpha$  – стала. Знайти проекцію напруженості електричного поля в точці  $M(2, 1, -3)$  на напрямок вектора  $\vec{a} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_z$ .
167. Знайти потенціал таких електричних полів: а)  $\vec{E} = a(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$ ; б)

$\vec{E} = 2axy\vec{e}_x + a(x^2 - y^2)\vec{e}_y$ ; с)  $\vec{E} = ay\vec{e}_x + (ax + bz)\vec{e}_y + by\vec{e}_z$ . Тут  $a, b$  – сталі.

168. Потенціал поля в певній області простору залежить тільки від координати  $x$  як  $\varphi = -ax^3 + b$ , де  $a, b$  – сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду  $\rho(x)$ .
169. Простір між двома паралельними площинами  $x = a$  та  $x = -a$  заповнено рівномірно розподіленим об'ємним зарядом. Різниця потенціалів пластин дорівнює  $\Delta\varphi$ . При якому значенні об'ємної густини  $\rho$  заряду напруженість поля в околі одної з пластин дорівнює нулю? Чому дорівнює при цьому напруженість поля в околі другої пластини?
170. Потенціал поля всередині зарядженої кулі залежить тільки від відстані  $r$  до його центра як  $\varphi = ar^2 + b$ , де  $a, b$  – сталі. Знайти розподіл об'ємного заряду  $\rho(r)$  всередині кулі.
171. Якому розподілу електричного заряду відповідає сферично-симетричний потенціал  $\varphi(r) = \exp(-\lambda r)/r$ , де стала  $\lambda > 0$ ?
172. Напруженість  $\vec{E}$  сферично-симетричного електричного поля залежить від відстані  $r$  до його центра як  $\vec{E} = ar\vec{r}$ , де  $a$  – стала. Знайти густину  $\rho(r)$  зарядів, що створюють це поле.
173. Система складається з двох концентричних провідних сфер. На внутрішній сфері радіуса  $a$  знаходиться додатний заряд  $q_1$ . Який заряд  $q_2$  слід розмістити на зовнішній сфері радіуса  $b$ , для того, щоб потенціал внутрішньої сфери дорівнював  $\varphi = 0$ ? Знайти залежність  $\varphi(r)$  від відстані  $r$  до центра системи і зобразити її графічно.
174. Дві однакових великих металевих пластини розташовані паралельно одна одній в вакуумі. Одна з пластин є катодом – джерелом електронів, початкова швидкість яких нехтовно мала. Електронний потік, направлений до другої пластини (анода), створює в просторі між пластинами об'ємний заряд, внаслідок чого потенціал змінюється за законом  $\varphi = \alpha x^{4/3}$ , де  $\alpha$  – додатна стала,  $x$  – відстань від катода. Знайти: а) просторову густину заряду; б) густину струму; в) вольт-амперну характеристику (ВАХ) системи, тобто, залежність напруги між катодом та анодом  $V$  від струму  $I$  через анод.
175. \* В нашому світі два заряди одного знаку відштовхуються з такою ж силою, з якою притягуються заряди протилежних знаків. Уявіть собі інший світ, в якому одиничний заряд визначається силою, що діє між зарядами одного знаку: два однакових додатних заряди,



розташованих на відстані в 1 м, відштовхуються один від одного із силою 1 Н, те ж саме справедливо і для від'ємних зарядів. Вважаємо також справедливим принцип суперпозиції та закон обернених квадратів. Однак додатній і від'ємний заряди притягуються із силою  $k$  Н, де  $k > 1$ . Покажіть, що в такому світі можлива ситуація, коли на точковий заряд з боку нейтрального тіла<sup>1</sup> діє сила. Чи можлива така ситуація в нашому світі? Чи необхідно в такому світі змінити або узагальнити поняття кількості заряду та електричного поля? Скільки різних вимірів за допомогою пробного заряду необхідно провести для визначення сили, що діє на довільний заряд, розташований в даній точці простору такого світу? Проаналізувати також випадок  $k < 1$ .

176. \* Розглянемо світ, в якому існує не два, а три типи електричного заряду: А, В і С. Нехай сила притягання між будь-якими зарядами різного типу вдвічі менша за силу відштовхування між зарядами одного типу. В усьому іншому електричну силу вважаємо такою ж, як і в нашому світі, тобто, справедливий принцип суперпозиції та закон обернених квадратів. Показати, що в такому світі можуть існувати цілком нейтральні тіла, тобто такі, що містять заряди всіх типів, сума зарядів дорівнює нулю, а саме тіло не створює сили, яка б діяла на інші заряди.
177. \* *Дослід Кавендиша.* Для перевірки закону обернених квадратів Г. Кавендиш в 1772 р. провів такий експеримент. На провідну кулю “наділи” провідну оболонку, яка щільно облягала кулю і складалася із двох напівсфер. Оболонку зарядили електричним зарядом, а потім від'єднали від кулі за допомогою ізольованих ручок. Після цього досліджували заряд кулі. Визначити, яким би був заряд кулі, у випадку а) коли справедливий закон Кулона; б) закон взаємодії зарядів відрізняється від Кулонівського і має вигляд:  $F \sim 1/r^{2+\alpha}$ , де  $r$  – відстань між зарядами. Вважати, що куля має радіус  $R$ , заряд, переданий оболонці, дорівнює  $Q$ . Відповідь обґрунтувати. В результаті експерименту Кавендиш встановив, що  $|\alpha| \leq 0,02$ . З якою відносною точністю він вимірював заряд?
178. \*\* Порівняти величину та напрямок поля точкового заряду  $q$  і рівномірно зарядженої до такого ж заряду  $q$  сфери радіуса  $r_0$  на від-

---

<sup>1</sup> Нейтральним називають тіло, яке містить заряди обох знаків, але сумарний заряд якого дорівнює нулю.

стані  $r > r_0$  від центра сфери у випадку, коли напруженість поля залежить від відстані а) за законом обернених квадратів (закон Кулона); б) за законом обернених кубів (порушення закону Кулона).

## 2. Магнітостатика в вакуумі

179. Знайти вектор індукції магнітного поля на осі котушок Гельмгольца в залежності від відстані  $z$  від їх центру. Котушки Гельмгольца представляють собою дві однакові плоскі котушки радіуса  $R$ , розташованих на відстані  $d = R$  одна від одної таким чином, щоб їх площини були паралельні, а осі співпадали. Вважати, що через котушки йде струм  $I$  (а) паралельно; б) в протилежних напрямках. Пояснити, чому для створення однорідного магнітного поля відстань між котушками повинна дорівнювати радіусу котушок. *Вказівка:* Знайти просторові похідні від величини вектора  $\vec{B}$  ( $dB/dz$ ,  $d^2/dz^2$ ) посередині між котушками. Вісь  $z$  спрямована вздовж осі котушок.
180. Всередині нескінченного циліндра радіуса  $R$  паралельно до його осі тече однорідний струм з об'ємною густиною  $\vec{j}$ . Користуючись інтегральною формою рівнянь Максвелла знайти індукцію магнітного поля всередині та зовні циліндра. За допомогою співвідношення  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  знайти векторний потенціал магнітного поля. При калібруванні векторного потенціала прийняти, що він дорівнює нулю на поверхні циліндра.
181. Вздовж прямого дрота з радіусом переріза  $R$  тече сталий струм з густиною  $\vec{j}$ . Знайти індукцію магнітного поля цього струму в точці, положення якої відносно осі дрота визначається вектором  $\vec{r}_\perp$ ?
182. Визначити розподіл об'ємної густини  $\vec{j}$  струму в просторі, якщо індукція  $\vec{B}$  магнітного поля цього струму має вигляд: а)  $\vec{B} = f(r)[\vec{a} \times \vec{r}]$ ; б)  $\vec{B} = (\vec{b}, \vec{r})[\vec{a} \times \vec{r}]$ . Тут  $\vec{a}, \vec{b} = \text{const}$ ,  $\vec{r} = (x, y, z)$ .
183. Чи можна підібрати такий розподіл електричного струму зовні порожнини, щоб всередині порожнини магнітна індукція мала вигляд:

$$\text{а) } \vec{B} = \vec{B}_0 = \text{const}; \quad \text{б) } \vec{B} = b(z\vec{e}_x + x\vec{e}_y + y\vec{e}_z);$$

$$\text{в) } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right],$$

де  $b = \text{const}$ ,  $\vec{p} = \text{const}$  і точка  $\vec{r} = 0$  знаходиться за межами порожнини? Відповідь обґрунтувати.

184. Заряд  $Q$  рівномірно розподілений по об'єму кулі радіуса  $R$ . Знайти індукцію магнітного поля  $\vec{B}$  в центрі кулі, якщо куля обертається навколо свого діаметра зі сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . У скільки разів зміниться індукція поля в центрі кулі, якщо заряд  $Q$  буде рівномірно розподілено тільки по поверхні кулі?
185. Вздовж нескінченно довгого прямолінійного циліндричного провідника з круговим перерізом радіуса  $R$  тече струм. Сила струму  $I$ , вісь провідника співпадає з віссю  $Z$  декартової системи координат. Знайти векторний потенціал поля, створеного струмом, як функцію відстані  $r$  до осі циліндра.
186. Нескінченно довгий прямолінійний циліндричний пучок з круговим перерізом радіуса  $R$  та сталою об'ємною густиною заряду  $\rho$  рухається в напрямку своєї осі зі сталою швидкістю  $\vec{v}$ . Знайти вектор магнітної індукції.
187. На поверхню дерев'яної кулі щільно, в один шар, намотані витки тонкого дроту. Площини всіх витків можна вважати перпендикулярними до одного й того ж самого діаметра кулі. Витки покривають рівномірно всю поверхню кулі. Радіус кулі  $R$ , кількість витків  $n$ , вздовж витків тече струм сили  $I$ . Знайти вектор магнітної індукції в центрі кулі.
188. Знайти густину струму як функцію відстані  $r$  від осі аксіально-симетричного паралельного потоку електронів, якщо індукція магнітного поля всередині потоку  $B = br^\alpha$ , де  $b, \alpha$  – сталі.

### 3. Провідник в електростатичному полі

#### Теоретичний довідник

Напруженість поля на поверхні провідника (див. Рис.30 а)

$$\vec{E} = \frac{\sigma \vec{n}}{\varepsilon_0}.$$

Електроємність усамітненого провідника ( $\varphi_\infty = 0$ ):

$$C = \frac{q}{\varphi - \varphi_\infty} = \frac{q}{\varphi}.$$

Електроємність конденсатора (див. Рис.30 b):

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Енергія конденсатора

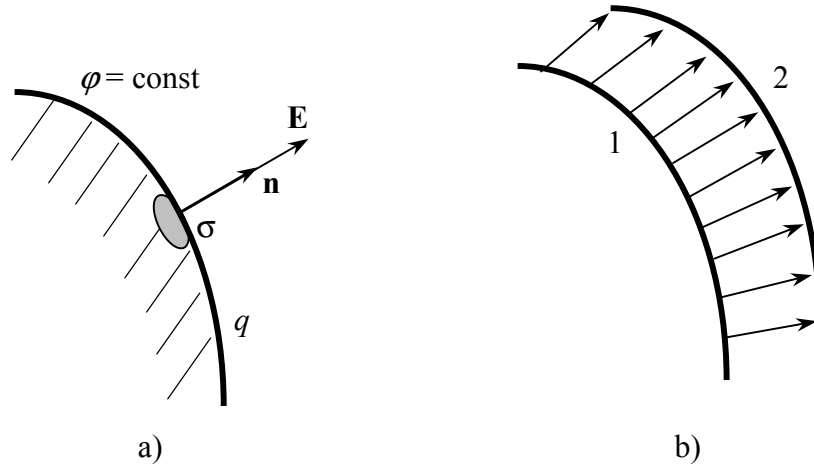


Рис. 30: Електричне поле поблизу поверхні провідника.

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{C|\varphi_2 - \varphi_1|^2}{2}.$$

Електроємність плоского конденсатора (див. Рис.31a):  $C = \varepsilon_0 S/d$ .  
Електроємність циліндричного конденсатора, що має радіуси поверхонь  $a$  та  $b$  (див. Рис.31b):

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{\ell}{\ln(b/a)}.$$

Електроємність сферичного конденсатора (див. Рис.31c):

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

189. Вивести формули для електроємності плоского конденсатора, який складається з двох плоских паралельних пластин площиною  $S$ , розташованих на відстані  $d$  одна від одної.

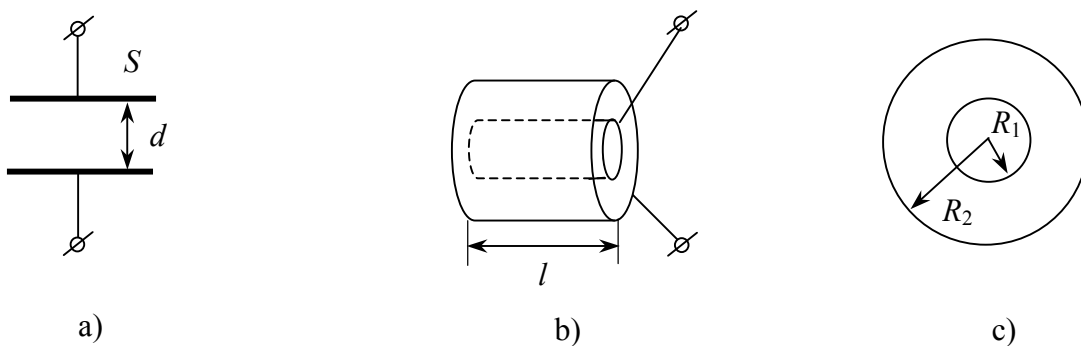


Рис. 31: Конденсатори: а) плоский; б) циліндричний; с) сферичний.

190. Знайти ємність циліндричного конденсатора, що має радіуси поверхонь  $a$  та  $b$ , висота циліндрів  $\ell$ .
191. Вивести формули для електроємності сферичного конденсатора, який складається з двох концентричних сфер з радіусами  $R_2 > R_1$ .
192. Чотири великих металевих пластини розташовані на малій (порівняно з розміром пластин) відстані  $d$  одна від одної. Зовнішні пластини з'єднані провідником, а на внутрішні пластини подана різниця потенціалів  $\Delta\varphi$ . Знайти: а) напруженість електричного поля між пластинами; б) сумарний заряд на одиницю площини кожної з пластин.
193. Знайти ємність системи однакових конденсаторів між точками А і В, вказаної на а) рис.32(а); б) рис.32(б).

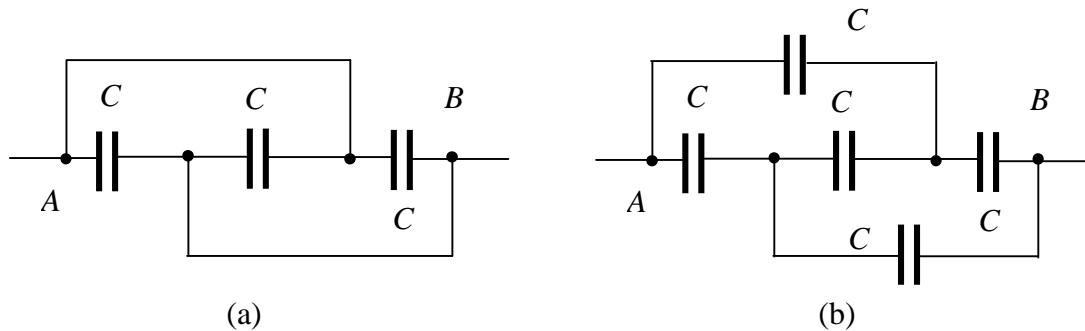


Рис. 32:

194. Чотири однакових металевих пластини (1, 2, 3, 4 в порядку розташування) розташовані в повітрі паралельно на однаковій відстані  $d = 1,00$  мм одна від одної. Площа кожної пластини  $S = 200$  см<sup>2</sup>. Знайти ємність системи між а) точками 2 і 4, якщо пластини 1 і 3 з'єднані провідником; б) точками 2 і 3, якщо пластини 1 і 4 з'єднані провідником.
195. Знайти ємність нескінченного кола, утвореного повторенням однакової ланки. Ланка складається з двох конденсаторів, кожний з яких має ємність  $C$  (див. рис. 33).

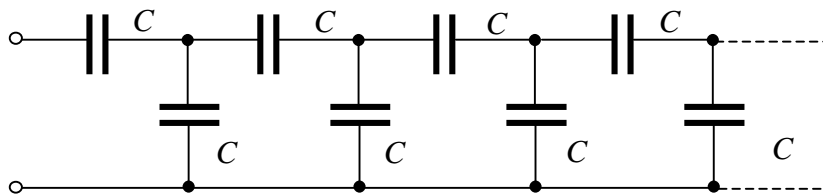


Рис. 33:

## 4. Енергія системи зарядів і струмів

### Теоретичний довідник

Енергія системи зарядів

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{E}^2 dV.$$

Власна енергія

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i,$$

де  $\varphi_i$  – потенціал поля в точці, де розташований заряд  $q_i$ .

Для неперервного розподілу заряду з густиною  $\rho$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV.$$

Енергія зарядів в зовнішньому полі

$$U = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i^{\text{ex}} \quad \text{або} \quad U = \int_V \rho \varphi^{\text{ex}} dV.$$

Енергія системи струмів

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int_V \vec{B}^2 dV.$$

Власна енергія

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} dV.$$

де  $\vec{A}$  – векторний потенціал поля в точці, де тече струм з густиною  $\vec{j}$ .

Енергія струмів в зовнішньому полі

$$U = \int_V \vec{A}^{\text{ex}} \cdot \vec{j} dV,$$

для тонких провідників

$$U = I \int \vec{A}^{\text{ex}} \cdot d\vec{\ell} = I \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = I\Phi.$$

Робота зовнішнього поля над струмом:

$$\mathcal{A} = I\Delta\Phi = I(\Phi_{\text{кін}} - \Phi_{\text{поч}}).$$

196. Заряд  $q$  розподілений рівномірно по об'єму кулі радіуса  $R$ . Знайти а) власну електричну енергію кулі; б) відношення енергії  $W_1$  всередині кулі до енергії  $W_2$  в навколишньому просторі.
197. Сферичну оболонку радіуса  $R_1$ , яка рівномірно заряджена зарядом  $q$ , розширили до радіуса  $R_2$ . Знайти роботу, яку виконали при цьому електричні сили.
198. Знайти сумарну енергію взаємодії точкових зарядів, розташованих вздовж прямої  $x$  (Рис. 34). В точках з координатами  $x = 2na$  розташовані заряди  $q$ , в точках з координатами  $x = (2n+1)a$  – заряди  $-q$ , де  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a$  – відстань між сусідніми зарядами.

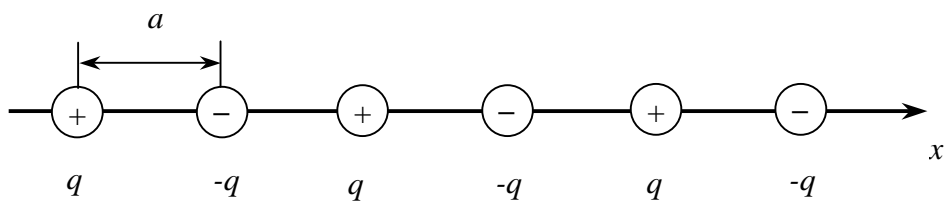


Рис. 34:

199. Три електрони, які на початку експерименту знаходились вздовж прямої на однаковій відстані  $\ell = 10,0$  мм один від одного, почали симетрично розлітатися. Знайти їх максимальні швидкості.
200. Плоский повітряний конденсатор помістили в зовнішнє однорідне електричне поле з напруженістю  $E = 1,30$  кВ/см, яке спрямовано перпендикулярно до пластин. Після цього пластини з'єднали провідником, потім провідник прибрали і перевернули конденсатор на  $180^\circ$  навколо осі, яка перпендикулярна напрямку поля. Знайти, яку при цьому виконали роботу проти електричних сил. Площа кожної з пластин  $S = 200$  см<sup>2</sup>, відстань між ними  $d = 5,00$  мм.
201. Яку роботу проти електричних сил слід виконати, щоб збільшити відстань між обкладинками плоского повітряного конденсатора від  $x_1$  до  $x_2$ , підтримуючи сталим а) заряд конденсатора  $q$ ; б) напругу на конденсаторі  $U$ ? Площа кожної з пластин  $S$ .
202. За яких умов енергію магнітного поля

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int \vec{B}^2 dV$$

можна представити у вигляді  $U = (1/2) \int \vec{j} \vec{A} dV$ , де  $\vec{A}$  – векторний потенціал магнітного поля струму, що має густину  $\vec{j}$ ?

203. Сталий струм з об'ємною густиною  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$  тече в обмеженій області простору. Довести, що вигляд формули

$$U = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} dV$$

для енергії поля не зміниться, якщо від векторного потенціала  $\vec{A}$  перейти до нового векторного потенціала  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$ , де  $f = f(\vec{r})$  – неперервна функція.



204. Квадратна рамка зі струмом  $I = 0,90$  А лежить в одній площині з довгим прямим провідником, вздовж якого тече сталий струм  $I_0 = 5$  А. Сторона рамки  $a = 8$  см. Провідник розташований паралельно до осі рамки, що проходить через її протилежні сторони, відстань між провідником і центром рамки в  $\eta=2$  рази більша за сторону рамки. Знайти механічну роботу, яку слід виконати, щоб повільно повернути рамку навколо її осі на  $180^\circ$ .

## 5. Електричні та магнітні диполі

### Теоретичний довідник

#### А) Електричний диполь

Дипольний момент (див. Рис. 35 а):  $\vec{p} = q\vec{\ell}$ .

Потенціал поля диполя ( $r \gg \ell$ ):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Напруженість електричного поля диполя:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

Поле диполя гармонічне:  $\text{div } \vec{E} = 0$ ,  $\text{rot } \vec{E} = 0$ .

Енергія диполя в зовнішньому полі:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -(p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z).$$

Сила, що діє на диполь у зовнішньому полі:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad \text{або} \quad \vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}.$$

В компонентах

$$F_x = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) E_x \quad \text{або} \quad F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Момент сили, що діє на диполь у зовнішньому полі:  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ .

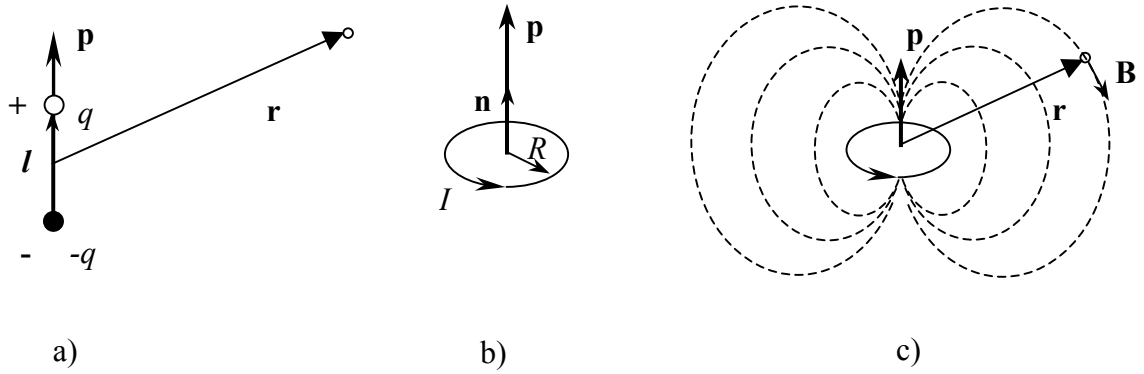


Рис. 35: а) електричний диполь; б) магнітний диполь; в) силові лінії поля диполя.

В компонентах:  $M_x = p_y E_z - p_z E_y$ , і т.д.

#### В) Магнітний диполь

Магнітний момент (див. Рис. 35 б):  $\vec{p} = IS\vec{n}$ .

Індукція магнітного поля диполя ( $r \gg R$ , див. Рис. 35 в):

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left( \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

Скалярний потенціал магнітного поля диполя :

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Векторний потенціал магнітного поля диполя:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{p} \times \vec{r}}{r^3}.$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \text{ або } \vec{B} = -\vec{\nabla}\psi.$$

Енергія диполя в зовнішньому полі:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{B} = -(p_x B_x + p_y B_y + p_z B_z).$$

Сила, що діє на диполь у зовнішньому полі:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{B}) \quad \text{або} \quad \vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}.$$

Момент сили, що діє на диполь у зовнішньому полі:  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{B}$ .

205. Показати, що поле електричного диполя є гармонічним, тобто  $\text{rot}\vec{E} = 0$  та  $\text{div}\vec{E} = 0$ .
206. Векторний потенціал поля магнітного диполя дорівнює

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p} \times \vec{r}]}{r^3}.$$

Показати, що

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2]}{r^5}.$$

207. Показати, що потенціал поля точкового електричного диполя з дипольним моментом  $\mathbf{p}$  (див. Рис. 36) можна представити як

$$\varphi = \frac{(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Знайти модуль напруженості електричного поля як функцію відстані до диполя  $r$  та кута  $\theta$  між дипольним моментом та напрямком на точку спостереження. Вказати границі застосування наведених виразів.

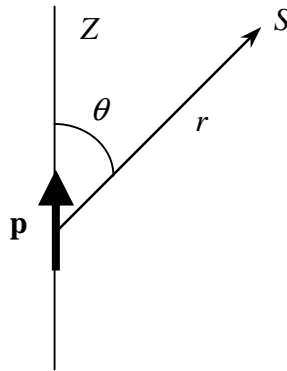


Рис. 36:

208. Точковий електричний диполь з дипольним моментом  $\vec{p}$  знаходиться у зовнішньому однорідному електричному полі з напруженістю  $\vec{E}_0$ , причому  $\vec{E}_0 \parallel \vec{p}$ . В цьому випадку одна із екіпотенціальних поверхонь, що охоплює диполь, є сферою. Знайти її радіус.
209. Яку роботу проти сил електричного поля слід виконати, щоб перенести точкового електричного диполя з моментом  $\mathbf{p}$  з положення 1

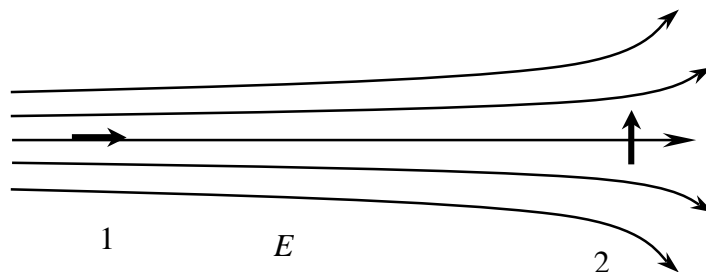


Рис. 37:

(напруженість поля  $E_1$ ) в положення 2 (напруженість поля  $E_2$ ), як зображено на Рис. 37?

210. Точковий електричний диполь з дипольним моментом  $\vec{p}$  знаходиться на відстані  $r$  від довгої прямої нитки. Нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною заряду  $\lambda$ . Знайти силу  $\vec{F}$ , що діє на диполь, якщо вектор орієнтований а) вздовж нитки; б) вздовж радіус-вектора  $\vec{r}$ ; в) перпендикулярно до нитки і радіус-вектора  $\vec{r}$ .
211. Довести, що магнітний момент струму

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} dV, \quad (1)$$

який тече в просторі з об'ємною густиною  $\vec{j}(\vec{r})$  не залежить від вибору початку відліку. Вважається, що магнітний момент струму має скінчене значення.

212. Використовуючи формулу (1) з задачі 211, знайти магнітний момент плоского контуру зі струмом  $I$ . Площина контура  $S$ .
213. Механічна система, яка складається зі скінченної кількості часток з однаковим питомим зарядом ( $q/m$ ) рухається в просторі. Знайти умову, якій повинен задовольняти повний імпульс  $\vec{P}$  системи, щоб сумарний магнітний момент всіх часток не залежав від вибору початку координат.
214. Непровідний тонкий диск радіуса  $R$ , рівномірно заряджений з одного боку з поверхневою густиною  $\sigma$ , обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Знайти магнітний момент  $\vec{P}_m$  диска.
215. Заряд  $Q$  рівномірно розподілений по об'єму кулі маси  $m$  та радіуса  $R$ . Куля обертається навколо свого діаметра зі сталою кутовою

- швидкістю  $\vec{\omega}$ . Знайти відповідний магнітний момент і його відношення до механічного моменту. Як зміниться відповідь, якщо заряд  $Q$  буде рівномірно розподілено тільки по поверхні кулі?
216. Нескінчено тонкий непровідний диск радіуса  $R$ , рівномірно заряджений з поверхневою густиною  $\sigma$ , обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Знайти індукцію магнітного поля  $\vec{B}$  на осі диска в залежності від відстані  $z$  до його центра. Дослідити індукцію поля при  $z \gg R$ , визначити магнітний момент  $\vec{P}_m$  диску, що обертається.
217. Рівномірно заряджений тонкий диск радіуса  $R$  обертається навколо своєї осі зі сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Повний заряд диска  $Q$ . Знайти магнітний момент  $\vec{P}_m$  диску, що обертається.
218. Електрон з орбітальним кутовим моментом  $M$  рухається по колу в однорідному сталому магнітному полі. Знайти магнітний момент електрона, користуючись формулою (1) з задачі 211.
219. Невеликий виток зі струмом знаходиться на відстані  $r$  від довгого прямого провідника зі струмом  $I$ . Магнітний момент витка дорівнює  $\vec{p}_m$ . Знайти модуль і напрямок сили  $\vec{F}$ , що діє на диполь, якщо вектор  $\vec{p}_m$  орієнтований а) вздовж провідника; б) вздовж радіус-вектора  $\vec{r}$ ; в) паралельно напрямку магнітного поля струму  $I$  в точці розташування витка.

## Е Електромагнітне поле в речовині

### Теоретичний довідник

#### А) Діелектрики

$$\sigma^* = \vec{P} \cdot \vec{n},$$

де  $\vec{P}$  – поляризованість (дипольний момент одиниці об'єму діелектрика),  $\sigma^*$  – поверхнева густина зв'язаних (поляризаційних) зарядів,  $\vec{n}$  – вектор нормалі до поверхні (див. Рис. 38).

$$\operatorname{div} \vec{P} = \rho^*, \quad \text{або} \quad \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = \rho^*(x, y, z).$$

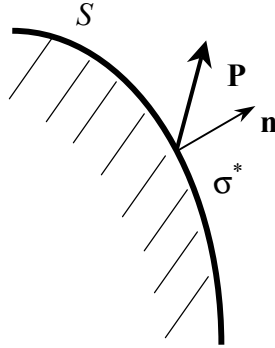


Рис. 38: Границя діелектрику з поверхневою густиною зв'язаних зарядів  $\sigma^*$ .

В ізотропних діелектриках  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ , де  $\chi$  – діелектрична сприйнятливість. Рівняння електростатики в діелектрику:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{free}}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0,$$

і матеріальне рівняння  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$  для вектора електричної індукції (зміщення). Тут  $\rho_{\text{free}}$  – густина вільних зарядів.

За визначенням,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . В ізотропних діелектриках  $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$ , де  $\varepsilon = 1 + \chi$  – діелектрична проникність.

### В) Магнетики

$$\vec{j}_{\text{micro}} = \operatorname{rot} \vec{I},$$

де  $\vec{I}$  – намагніченість речовини (вектор дипольного магнітного моменту на одиницю об'єму),  $\vec{j}_{\text{micro}}$  – об'ємна густина молекулярних струмів.

За визначенням, напруженість магнітного поля  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{I}$ . В ізотропному середовищі  $\vec{I} = \chi_m \vec{H}$ , де  $\chi_m$  – магнітна сприйнятливність,  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ , де  $\mu = 1 + \chi_m$  – магнітна проникність.

Рівняння магнітостатики в середовищі:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{free}}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

і матеріальне рівняння  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ . Тут  $\vec{j}_{\text{free}}$  – об'ємна густина струму вільних зарядів.

## 1. Діелектрики

220. Показати, що  $\vec{P} \cdot \vec{n} = \sigma^*$ , де  $\vec{P}$  - поляризованість,  $\sigma^*$  - поверхнева густина зв'язаних зарядів,  $\vec{n}$  - нормаль до поверхні діелектрика.
221. Показати, що напруженість і потенціал електричного поля в діелектрику в  $\epsilon$  разів менше, ніж в вакуумі. В якому випадку це твердження справедливе?
222. Плоский конденсатор створено двома дисками, між якими розташоване однорідне середовище з діелектричною проникністю  $\epsilon$  і слабкою провідністю  $\sigma$ . Конденсатор зарядили і відключили від джерела живлення. Нехтуючи крайовими ефектами показати, що магнітне поле всередині конденсатора відсутнє.
223. Циліндричний конденсатор з радіусами циліндрів  $r_1$  та  $r_2$  опущено вертикально в діелектричну рідину з діелектричною проникністю  $\epsilon$ . Нижній кінець конденсатора знаходиться в рідині, а верхній – в повітрі. Густина рідини дорівнює  $\rho$ . Знайти висоту  $h$ , на яку підніметься рідина між пластинами конденсатора, якщо різниця потенціалів між ними  $U$ .
224. Знайти напруженість електричного поля в центрі прямого круглого циліндра довжини  $\ell$  і радіуса  $a$ , вектор поляризованості  $\vec{P}$  якого паралельний осі і однорідний.
225. Знайти напруженість електричного поля в центрі прямого круглого циліндра довжини  $\ell$  і радіуса  $a$ , вектор поляризованості  $\vec{P}$  якого перпендикулярний осі і однорідний.
226. Простір між плоскими нескінченно довгими паралельними електродами, які знаходяться на відстані  $d$  один від одного, заповнено двома шарами речовини, границя між якими плоска і паралельна електродам. Провідності і діелектричні проникності шарів дорівнюють, відповідно,  $\gamma_1$ ,  $\epsilon_1$  і  $\gamma_2$ ,  $\epsilon_2$ , а товщини шарів  $a$  і  $d - a$ . Електроди підтримують при потенціалах  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ . Знайти потенціал і поверхневу густина заряду на границі між шарами.
227. В певній точці А всередині однорідного діелектрика з діелектричною проникністю  $\epsilon = 2,5$  густина стороннього заряду дорівнює  $\rho = 50$  мКл/м<sup>3</sup>. Знайти густина зв'язаних зарядів в цій точці.
228. Знайти ємність сферичного конденсатора (радіуси обкладинок  $R_1$  та  $R_2 > R_1$ ), якщо простір між обкладинками заповнено діелектри-

ком: а) з проникністю  $\varepsilon$ ; б) з проникністю, яка залежить від відстані  $r$  до центра конденсатора як  $\varepsilon(r) = \alpha/r$ , де  $\alpha$  – стала.

229. Знайти ємність циліндричного конденсатора (радіуси обкладинок  $R_1$  та  $R_2 > R_1$ , довжина  $\ell$ ), якщо простір між обкладинками заповнено діелектриком: а) з проникністю  $\varepsilon$ ; б) з проникністю, яка залежить від відстані  $r$  до осі конденсатора як  $\varepsilon(r) = \alpha/r$ , де  $\alpha$  – стала.

## 2. Магнетики

230. Довгий соленоїд заповнено неоднорідним парамагнетиком, магнітна сприйнятливість якого залежить тільки від відстані  $r$  до осі соленоїда як  $\chi = ar^2$ , де  $a$  – стала. На осі соленоїда індукція магнітного поля дорівнює  $B_0$ . Знайти залежність від  $r$  намагніченості магнетика  $I(r)$  та густини молекулярного струму  $j'(r)$  в магнетик.
231. Прямий нескінченно довгий провідник зі струмом  $I$  лежить в площині розподілу двох непровідних середовищ з магнітними проникностями  $\mu_1$  та  $\mu_2$ . Знайти індукцію  $B$  магнітного поля у всьому просторі в залежності від відстані  $r$  до провідника. Відомо, що лінії  $\vec{B}$  – кола з центром на осі провідника.
232. Знайти вектори  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  всередині та поза межами однорідного ферромагнетика, який має форму нескінченної пластини. Вектор намагніченості  $\vec{I}$  спрямований а) перпендикулярно і б) паралельно до поверхні пластини.
233. Довгий тонкий стержень з парамагнітного матеріалу зі сприйнятливістю  $\chi$  розташований вздовж осі котушки зі струмом. Один кінець стержня знаходиться в центрі котушки, де індукція магнітного поля дорівнює  $B$ , а інший – в області, де магнітне поле практично відсутнє. Знайти силу, з якою котушка діє на стержень. Площа поперечного перерізу стержня  $S$ .
234. Для вимірювання парамагнітної сприйнятливості  $\chi$  користуються такою установкою. Досліджуваний зразок (маленька кулька об'ємом  $V = 41 \text{ мм}^3$ ) підвішують на нитці над полюсом магніта, який створює неоднорідне магнітне поле  $B = B_0 \exp(-ax^2)$ , де  $x$  – відстань по вертикалі від накінецьника магніта,  $B_0 = 1,50 \text{ Тл}$ ,  $a = 100 \text{ м}^{-2}$ , і вимірюють за допомогою динамометра силу, що діє



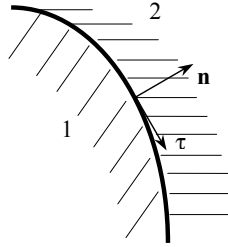


Рис. 39: Границя розділу двох середовищ.

на кульку. Знайти: на якій висоті  $x_m$  від магніта слід розмістити кульку, щоб сила притягання була максимальною; б) магнітну сприйнятливість парамагнетика, якщо максимальна сила притягання дорівнює  $F_{max} = 160$  мкН.

235. Невеличку кульку з парамагнітного матеріалу зі сприйнятливістю  $\chi$  повільно перемістили вздовж осі котушки зі струмом з центру, де індукція магнітного поля дорівнює  $B$ , в область, де магнітне поле практично відсутнє. Знайти роботу, виконану проти магнітних сил. Об'єм кульки  $V$ .

### 3. Граничні умови для електричних та магнітних полів

#### Теоретичний довідник

Граничні умови для електричного поля (див. Рис. 39):

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \quad P_{2n} - P_{1n} = -\sigma^*.$$

Граничні умови для магнітного поля:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = i, \quad I_{2\tau} - I_{1\tau} = i_{\text{micro}}, \quad B_{2n} = B_{1n}.$$

Тут  $i$ ,  $i_{\text{micro}}$  – лінійна густина струму вільних зарядів та молекулярних мікрострумів, відповідно, на поверхні розподілу.

Рівняння Максвелла в середовищі:

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{free}} \quad \text{або} \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{free}},$$

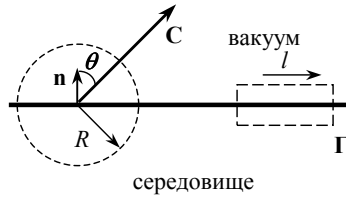


Рис. 40:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{або} \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right),$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{або} \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{free}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{або} \quad \oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{free}} + \frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right),$$

$\vec{D} = f(\vec{E})$ ,  $\vec{B} = f(\vec{H})$  – матеріальні рівняння.

236. Напруженість поля в вакуумі поблизу плоскої поверхні однорідного ізотропного діелектрика (діелектрична проникність  $\varepsilon$ ) дорівнює  $E_0$ , а кут між вектором  $\vec{E}_0$  та нормаллю до поверхні дорівнює  $\theta$ . Знайти: а) потік вектора  $\vec{E}$  через поверхню сфери  $S$  радіуса  $R$  з центром на поверхні діелектрика (див. Рис.40), б) циркуляцію вектора  $\vec{D}$  по прямокутному контуру  $\Gamma$ , площа якого перпендикулярна до поверхні діелектрика і паралельна вектору  $\vec{E}_0$ . Поле зовні і всередині діелектрика однорідне.
237. Показати, що за відсутності струму через границю розподілу двох середовищ, нормальні компоненти вектора Пойнтинга не зазнають розриву на границі, тобто,  $\Pi_{1n} = \Pi_{2n}$ .
238. Показати, що на границі однорідного плоского діелектрика з провідником поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma^* = -\sigma(\varepsilon - 1)/\varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність,  $\sigma$  – поверхнева густина зарядів на провіднику.
239. В околі точки А границі розподілу скло/вакуум напруженість електричного поля в вакуумі  $E_0 = 10,0$  В/м, а кут між вектором напруженості  $\vec{E}_0$  і нормаллю  $\vec{n}$  до границі розподілу складає  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Знайти напруженість поля  $E$  в склі в околі точки А, кут  $\alpha$  між векторами  $\vec{n}$  та  $\vec{E}$ , а також поверхневу густина зв'язаних зарядів в точці А. Діелектрична проникність скла  $\varepsilon = 6$ .

240. Провідник з питомим опором  $\rho$  граничить з діелектриком з проникністю  $\epsilon$ . В точці А біля поверхні провідника електрична індукція дорівнює  $D$ , причому вектор  $\vec{D}$  спрямований від провідника і утворює кут  $\alpha$  з нормаллю до поверхні. Знайти поверхневу густину зарядів на провіднику поблизу точки А і густину струму в провіднику в околі цієї точки.
241. Діелектрик з проникністю  $\epsilon$  граничить з вакуумом. На поверхні діелектрика розташовані сторонні заряди з поверхневою густиною  $\sigma$ . Поблизу поверхні діелектрика в вакуумі напруженість електричного поля дорівнює  $E$ . Яким повинен бути кут  $\theta$  між вектором  $\vec{E}$  та нормаллю до поверхні розділу, щоб лінії вектора  $\vec{E}$  не зазнавали злому при переході через границю розподілу? Визначити знак  $\sigma$ .
242. Показати, що закон заломлення ліній сталого струму на межі розподілу двох провідних середовищ з провідностями  $\sigma_1, \sigma_2$ , відповідно, має вигляд:

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  – кути між лініями струму та нормаллю до межі розподілу даних середовищ.

243. За певних умов поляризованість нескінченної незарядженої пластини товщини  $2d$  з діелектрика залежить від відстані до середини пластини  $x$  як  $\vec{P} = \vec{P}_0(1 - x^2/d^2)$ , де  $\vec{P}_0$  – вектор, перпендикулярний площині пластини. Знайти напруженість електричного поля всередині пластини та різницю потенціалів між її поверхнями.
244. На початку експерименту простір між обкладинками плоского конденсатора заповнено повітрям і при цьому напруженість електричного поля в зазорі дорівнювала  $E_0$ . Потім половину зазору заповнили однорідним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ . Знайти модулі векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  в обох частинах зазору, якщо при введенні діелектрика а) напруга між обкладинками не змінювалась; б) заряди на обкладинках не змінювались. Площа пластини діелектрика дорівнює площі обкладинки і діелектрик заповнює половину товщини зазору.
245. На початку експерименту простір між обкладинками плоского конденсатора заповнено повітрям і при цьому напруженість електричного поля в зазорі дорівнювала  $E_0$ . Потім половину зазору заповнили однорідним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ . Знайти модулі

векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{D}$  в обох частинах зазору, якщо при введенні діелектрика а) напруга між обкладинками не змінювалась; б) заряди на обкладинках не змінювались. Товщина діелектрика майже співпадає з товщиною зазору, площа пластини діелектрика вдвічі менша за площу обкладинки.

246. Діелектричний циліндр радіуса  $R$  обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$ . Система знаходиться в зовнішньому магнітному полі, вектор індукції якого  $\vec{B}$  паралельний осі обертання. Знайти поляризованість циліндра та поверхневу густину зв'язаних зарядів. Діелектрична проникність речовини циліндра дорівнює  $\epsilon$ .
247. Індукція магнітного поля в вакуумі поблизу плоскої поверхні однорідного ізотропного магнетика (магнітна проникність  $\mu$ ) дорівнює  $B$ , причому кут між вектором  $\vec{B}$  та нормаллю до поверхні дорівнює  $\theta$ . Знайти індукцію  $B'$  магнітного поля в магнетикі поблизу поверхні.
248. Індукція магнітного поля в вакуумі поблизу плоскої поверхні однорідного ізотропного магнетика (магнітна проникність  $\mu$ ) дорівнює  $B$ , а кут між вектором  $\vec{B}$  та нормаллю до поверхні дорівнює  $\theta$ . Знайти: а) потік вектора  $\vec{H}$  через поверхню сфери  $S$  радіуса  $R$ , центр якої лежить на поверхні магнетика (див. Рис. 40 на стор. 66), б) циркуляцію вектора  $\vec{B}$  по квадратному контуру  $\Gamma$  зі стороною  $\ell$  (дві протилежні сторони квадрата паралельні поверхні, а дві інші – перпендикулярні).

## ґ Сталі електричні струми в провідниках

### Теоретичний довідник

Закон Ома в диференціальній (локальній) формі:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

де  $\sigma$  – питомий електропровідність;

в інтегральній формі для ділянки кола (див. Рис. 41):

$$U = |\Delta\varphi| = RI,$$

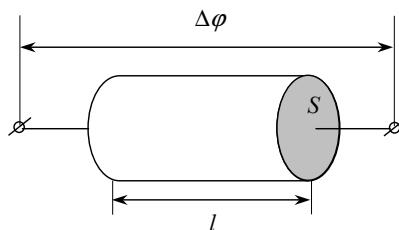


Рис. 41: Ділянка електричного кола.

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} = \rho_R \frac{\ell}{S}, \quad \rho_R = \frac{1}{\sigma}.$$

Закон Джоуля-Ленца в диференціальній (локальній) формі для питомої потужності (тепло, що виділяється за 1 с в одиниці об'єму):

$$Q_* = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2.$$

в інтегральній формі для потужності (тепло, що виділяється за 1 с в об'ємі провідника):

$$Q_* = I^2 R = UI = \frac{U^2}{R}.$$

Закони Кірхгофа:

- 1) В кожному вузлі електричного кола алгебраїчна сума сил струмів дорівнює нулю:

$$\sum_k I_k = 0.$$

- 2) В замкненому електричному колі сума всіх ЕРС дорівнює сумі падіння напруг на всіх опорах:

$$\sum_n \mathcal{E}_n = \sum_k R_k I_k.$$

## 1. Причини виникнення електричних струмів. Електрорушійна сила (ЕРС). Закони Кірхгофа

249. Показати, що розмірність питомого опору [Ом·м].

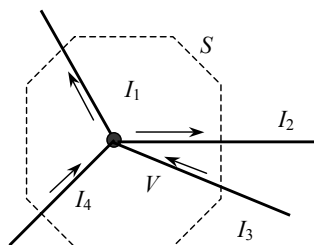


Рис. 42:

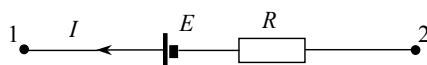


Рис. 43:

250. Розглянемо розгалуження струмів, що показано на Рис. 42, в стаціонарному випадку. Довести, що

$$a) \quad \sum_k I_k = \oint_S \vec{j} \vec{n} dS,$$

$$b) \quad \oint_S \vec{j} \vec{n} dS = 0.$$

251. Для ділянки лінійного кола, зображеної на Рис. 43, довести, що  $IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$ .

252. Розглянути поверхню розподілу двох провідників з провідностями  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ , відповідно, (див. Рис. 44) і довести, що

$$\frac{\vec{n} \times \vec{j}_1}{\sigma_1} = \frac{\vec{n} \times \vec{j}_2}{\sigma_2}.$$

Тут  $\vec{j}$  – густина струму.

253. Розв'язком рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

є вираз

$$\rho(t, \vec{r}) = \rho_0(\vec{r}) \exp \left( -\frac{\sigma t}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right),$$

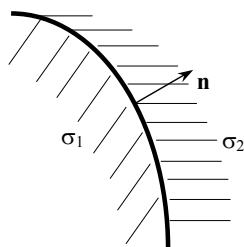


Рис. 44:

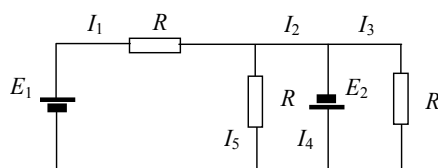


Рис. 45:

де  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  – сталі. Як наслідок, отримуємо (зробіть це!)

$$Q = Q_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0 \varepsilon}\right),$$

що, здається, протирічить закону збереження електричного заряду. З'ясуйте, в чому тут справа?

254. Знайти струми в колі, зображеному на Рис.45.  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 12 \text{ В}$ ,  $R=1 \text{ кОм}$ . Внутрішнім опором джерел знехтувати.

## 2. Електропровідність

255. Проміжок між обкладинками плоского конденсатора заповнений послідовно двома діелектричними шарами 1 і 2 товщиною  $d_1$  і  $d_2$  з діелектричними проникностями  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  та питомими опорами  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , відповідно. неідеальний діелектрик). На обкладинки конденсатора подають постійну напругу  $U$ , причому електричне поле напрямлено від шару 1 до шару 2. Знайти поверхневу густину сторонніх зарядів на поверхні розділу діелектричних шарів і умову, за якої вона дорівнює нулю.
256. Довгий провідник з круговим перерізом радіуса  $a$  виготовлено з матеріалу, питомий опір якого залежить тільки від відстані  $r$  до

- осі провідника за законом  $\rho = \alpha/r^2$ , де  $\alpha$  – стала. Знайти опір одиниці довжини такого провідника та напруженість електричного поля, якщо по провіднику тече струм  $I$ .
257. Знайти електричне поле та ємність плоского конденсатора, який заповнено діелектриком зі змінною проникністю  $\varepsilon = 1 + \alpha x$ . Пластини конденсатора розташовані в площинах  $x = 0$ ,  $x = h$ , різниця потенціалів між пластинами дорівнює  $U$ , площа пластин  $S$ .
258. Простір між двома коаксіальними ідеально провідними циліндрами радіусів  $a$  і  $b$  заповнили однорідною слабкопровідною речовиною з питомим опором  $\rho$ . Довжина кожного з циліндрів  $\ell$ . Знайти опір середовища між циліндрами. Крайовими ефектами знехтувати.
259. Простір між двома концентричними ідеально провідними сферами радіусів  $a$  і  $b$  заповнили однорідною слабкопровідною речовиною з питомим опором  $\rho$ . Знайти опір середовища між сферами. Окремо розглянути випадок, коли радіус зовнішньої сфери прямує до нескінченості.
260. Простір між нескінченно довгими коаксіальними ідеально провідними циліндрами радіусів  $a$  і  $b$  заповнили речовиною з провідністю  $\sigma(r) = \alpha r^n$ , де  $r$  – відстань до осі. Знайти опір середовища на одиницю довжини.
261. Простір між двома концентричними ідеально провідними сферами радіусів  $a$  і  $b$  заповнили однорідною слабкопровідною речовиною. Ємність такої системи дорівнює  $C$ . Знайти питомий опір  $\rho$  речовини, якщо відомо, що при відключенні системи від зовнішньої напруги різниця потенціалів між сферами зменшилась в  $\eta$  разів за час  $\delta t$ .

### 3. Сталий електричний струм

262. *Закон Богуславського-Ленгмюра.* Знайти залежність густини  $j$  сталого струму від напруги  $U$  для вакуумного діоду (див. Рис. 46). Катод і анод представляють собою плоскопаралельні пластини, що розташовані в вакуумній колбі на відстані  $\ell$  одна від одної. Вважати, що напруга на катоді дорівнює нулю, питомий заряд електрона (заряд одиниці маси)  $q_{sp}$ .
263. Знайти опір між точками А і В в колі, зображеному на Рис. 47 а), якщо  $R_1 = 100$  Ом і  $R_2 = 50$  Ом.



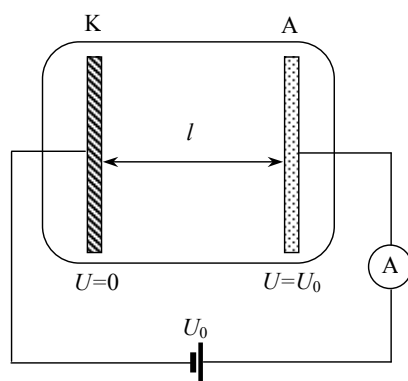


Рис. 46:

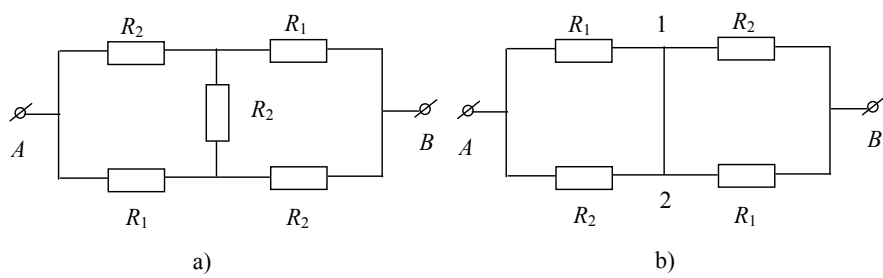


Рис. 47:

264. Знайти величину і напрямок струму на ділянці 1-2 в колі, зображеному на Рис. 47 b), якщо  $R_1 = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ , різниця потенціалів між точками А і В дорівнює  $U = 20 \text{ В}$ .
265. Скільки теплоти виділиться в спіралі з опором  $R = 75 \text{ Ом}$  при проходженні через неї заряду  $q = 100 \text{ Кл}$ , якщо струм в спіралі: а) лінійно спадає до нуля протягом  $\Delta t = 50 \text{ с}$ ; б) монотонно спадає до нуля таким чином, що через кожні  $\Delta t = 2 \text{ с}$  величина струму зменшується вдвічі.
266. Акумулятор з ЕРС  $\mathcal{E} = 2,6 \text{ В}$ , замкнений на зовнішній опір, дає струм  $I = 1,0 \text{ А}$ . При цьому різниця напруг між полюсами акумулятора становить  $U = 2,0 \text{ В}$ . Знайти теплову потужність, що виділяється в акумуляторі, та потужність, яку розвивають в ньому електричні сили.
267. Резистор з опором  $R$  і нелінійний опір з вольт-амперної характеристикою  $U = a\sqrt{I}$ , де  $a$  – стала, з'єднані послідовно і під'єднані до напруги  $U_0$ . Знайти струм в колі.

## Г Електромагнітна індукція

### Теоретичний довідник

В загальному випадку

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Закон Фарадея:

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{де} \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS.$$

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = \oint_{\mathcal{L}} (\vec{E}_{\text{curl}} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}, \quad \text{де} \quad \vec{E}_{\text{curl}} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

ЕРС індукції в нерухомих провідниках:

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_{\text{curl}} \cdot d\vec{\ell}$$

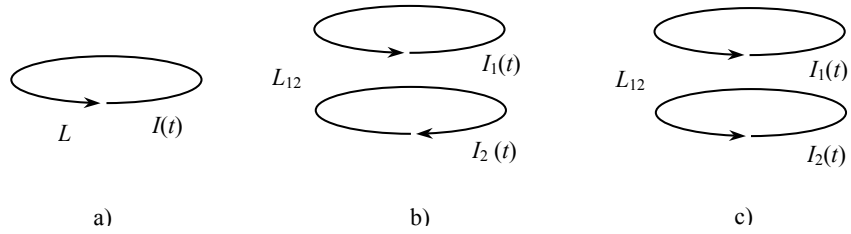


Рис. 48: Індуктивність провідників.

В рухомих провідниках:

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = \oint_{\mathcal{L}} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

Сила струму в колі в загальному випадку:

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{in}}}{R} = \frac{1}{R} \left( \mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} \right).$$

ЕРС самоіндукції

$$\mathcal{E}_{\text{s}} = -\frac{d\Phi_{\text{s}}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad \text{де} \quad \Phi_{\text{s}} = IL.$$

$L$  – коефіцієнт самоіндукції провідника (Рис. 48 а)

ЕРС взаємоіндукції:

$$\mathcal{E}_1^{\text{вз}} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2^{\text{вз}} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

де  $L_{12} = L_{21}$  – коефіцієнт взаємоіндукції (взаємоіндуктивність, Рис. 48 b,c) Магнітна енергія провідника зі струмом

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{\Phi^2}{2L}$$

Індуктивність соленоїда з довжиною  $\ell$  і об'ємом  $V$ :  $L = \mu_0 \mu n^2 V$ , де  $n = N/\ell$ ,  $N$  – кількість витків.

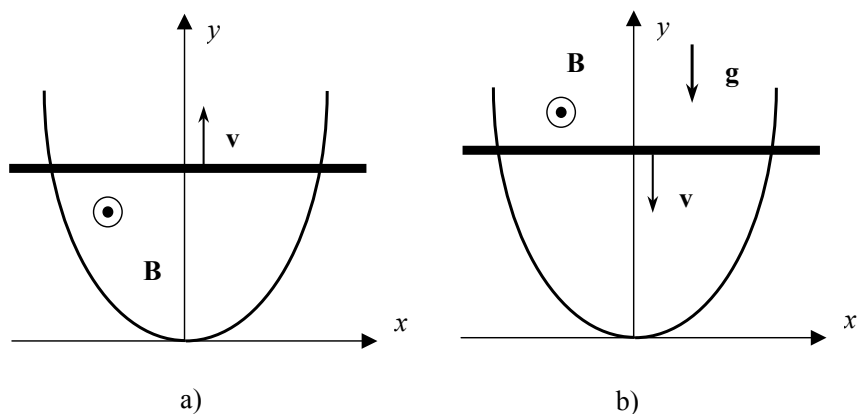


Рис. 49: Рух провідника в магнітному полі.

## 1. Явище електромагнітної індукції

268. Провідник, що має форму параболи  $y = kx^2$ , знаходиться в сталому однорідному магнітному полі, вектор індукції якого  $\vec{B}$  перпендикулярний площині  $xy$  декартової системи координат (Рис.49 а). З вершини параболи в момент часу  $t = 0$  паралельно осі  $x$  почали переміщувати перемичку. Знайти ЕРС індукції в колі, що утворилося, як функцію  $y$ , якщо перемичку переміщують а) зі сталою швидкістю  $v$ ; б) зі сталим прискоренням  $a$ , причому в момент  $t = 0$  швидкість перемички дорівнювала нулю.
269. Те ж саме, що в задачі 268, за умови, що провідник має форму  $y = k|x|$ .
270. Провідник, що має форму параболи  $y = kx^2$ , знаходиться в сталому однорідному магнітному полі, вектор індукції якого  $\vec{B}$  перпендикулярний площині  $xy$  декартової системи координат (Рис.49 б). В момент часу  $t = 0$  паралельно осі  $x$  починає вільно падати (з нульовою початковою швидкістю) в однорідному полі тяжіння перемичка маси  $m$ . Знайти залежність від  $y$  ЕРС індукції в колі, що утворилося, а також прискорення  $a$ . Вважати, що в момент  $t = 0$  координата перемички  $y = y_0$ , індуктивність кола  $L(y) = \alpha y$ , де  $\alpha$  – стала, опором провідників та перемички знехтувати.
271. Те ж саме, що в задачі 270, за умови, що провідник має форму  $y = k|x|$ .
272. Металевий диск радіуса  $R = 25$  см обертають зі сталою кутовою

швидкістю  $\omega = 130$  рад/с навколо осі, що перпендикулярна його площині. Знайти різницю потенціалів між центром диска та його ободом, якщо а) магнітне поле відсутнє; б) зовнішнє однорідне стає магнітне поле з індукцією  $B = 5,0$  мТл прикладене перпендикулярно до площини диска.

273. Довгий прямий провідник зі струмом  $I$  та П-образний провідник з рухомою перемичкою розташовані в одній площині. Перемичка довжини  $\ell$  рухається з постійною швидкістю  $v$  в напрямку, який перпендикулярний до провідника зі струмом, від нього. При русі перемичка залишається паралельною провіднику. Знайти ЕРС індукції як функцію відстані  $r$  між провідником та перемичкою.
274. По двом гладеньким вертикальним провідникам, розташованим на відстані  $\ell$  один від одного, ковзає під дією сили тяжіння провідник-перемичка маси  $m$ . Вгорі провідники замкнені на опір  $R$ . Система знаходиться в однорідному сталому магнітному полі. Вектор індукції поля  $\vec{B}$  спрямований перпендикулярно до площини, в якій рухається перемичка. Знайти усталену швидкість руху перемички. Опором провідників, перемички, рухомих контактів, а також магнітним полем індукційного струму знехтувати.
275. По двом гладеньким вертикальним провідникам, розташованим на відстані  $\ell$  один від одного, ковзає під дією сили тяжіння провідник-перемичка маси  $m$ . Вгорі до провідників підключено конденсатор ємності  $C$ . Система знаходиться в однорідному сталому магнітному полі. Вектор індукції поля  $\vec{B}$  спрямований перпендикулярно до площини, в якій рухається перемичка. Знайти прискорення перемички. Опором провідників, перемички, рухомих контактів, а також магнітним полем індукційного струму знехтувати.
276. По двом гладеньким вертикальним провідникам, розташованим на відстані  $\ell$  один від одного, ковзає під дією сили тяжіння провідник-перемичка маси  $m$ . Вгорі до провідників підключено котушку індуктивності  $L$ . Система знаходиться в однорідному сталому магнітному полі. Вектор індукції поля  $\vec{B}$  спрямований перпендикулярно до площини, в якій рухається перемичка. Знайти залежність від часу струму в контурі. В початковий момент часу струм в контурі дорівнював нулю, перемичка знаходилась в стані спокою. Опором провідників, перемички, рухомих контактів знехтувати.
277. Контур, що має форму кола з площиною  $S$  та опором  $R$ , знахо-

диться в сталому однорідному магнітному полі, вектор індукції  $\vec{B}$  якого спрямований перпендикулярно до діаметра контуру. Знайти момент зовнішньої сили  $N(t)$ , якою слід діяти на контур, щоб підтримувати його обертання зі сталою кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо діаметра. Вважати, що в момент  $t = 0$  площина контуру перпендикулярна до вектора магнітної індукції. Магнітним полем індукційного струму знехтувати.

278. П-образний провідник знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції якого перпендикулярний до площини провідника, а величина вектора змінюється з часом зі швидкістю  $\dot{B} = 0,10 \text{ Тл/с}$ . Вздовж паралельних сторін цього провідника пересувають з прискоренням  $a = 10 \text{ см/с}^2$  провідник-перемичку. Довжина перемички  $\ell = 20 \text{ см}$ . Знайти ЕРС індукції в контурі через  $t = 2,0 \text{ с}$  після початку руху перемички, якщо при  $t = 0$  площа контура, індукція магнітного поля і швидкість перемички дорівнювали нулю.
279. До джерела напруги  $U$  підключені два довгих паралельних провідника з нехтовно малим опором. Провідники знаходяться на відстані  $\ell$  один від одного. Коло замикає рухомий стержень маси  $m$  з опором  $R$  перпендикулярний до провідників (див. Рис. 50 а), який ковзає вздовж провідників і при цьому залишається весь час перпендикулярним до них. Вся система знаходиться в однорідному магнітному полі, вектор індукції  $\vec{B}$  якого перпендикулярний до площини провідників. В початковий момент  $t = 0$  координата стержня  $x = 0$ , швидкість  $v = 0$ . Знайти: а) усталену швидкість стержня за відсутності зовнішнього механічного навантаження; б) залежність від часу швидкості руху стержня.
280. В умовах задачі 279 до стержня приклали сталу силу  $F$  напрямлену протилежно напрямку руху (див. Рис. 50 б). Знайти усталену швидкість руху стержня. Яка частка  $\alpha$  електричної енергії, що відбирається від джерела напруги, перетворюється в механічну роботу?
281. Показати, що коефіцієнти взаємодуктивності  $L_{ij}$  є алгебраїчними величинами, зокрема,  $L_{12} > 0$  для двох рамок зі струмом, площини яких паралельні, а напрямки струму співпадають (Рис. 48 с), і  $L_{12} < 0$  для двох рамок зі струмом, площини яких паралельні, а напрямки струмів протилежні (Рис. 48 б).
282. Струм в довгому соленоїді змінюють зі сталою швидкістю  $\dot{I} \text{ А/с}$ .

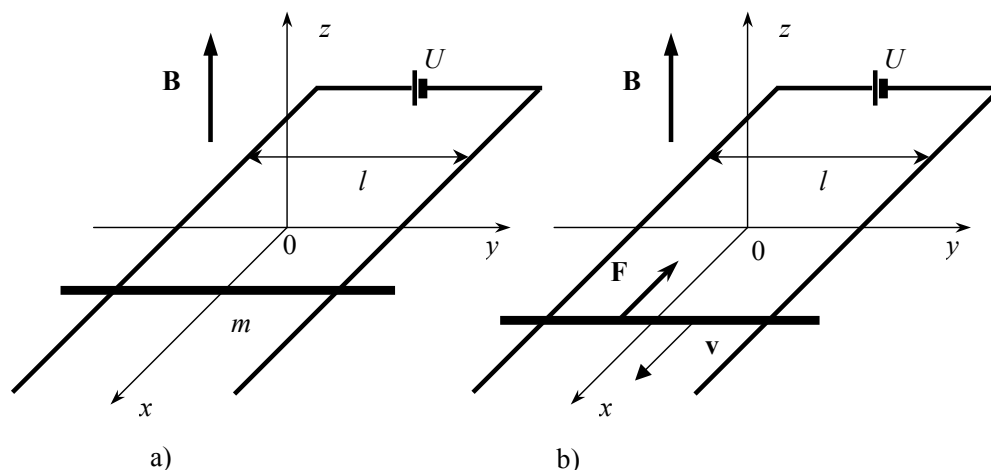


Рис. 50: Рухомий стержень в магнітному полі.

Радіус переріза соленоїда  $R$ , кількість витків на одиницю довжини  $n$ . Знайти напруженість вихрового електричного поля як функцію відстані  $r$  від осі соленоїда. Зобразити цю залежність графічно.

283. На довгий соленоїд з діаметром перерізу  $d = 5$  см та кількістю витків  $n = 20$  на 1 см довжини щільно наділи круговий виток з мідного дроту з перерізом  $S = 1,0$  мм<sup>2</sup>. Знайти струм в витку, якщо струм в обмотці соленоїда збільшують зі сталою швидкістю  $\dot{I} = 1$  А/с. Магнітним полем індукційного струму знехтувати. Питомий опір міді 16 нОм·м.
284. Замкнений на себе соленоїд радіуса  $a$  з  $n$  витками обертається з кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  навколо діаметра одного з витків в однорідному магнітному полі з індукцією  $\vec{B}$ . Вектор індукції перпендикулярний до осі обертання. Опір соленоїда дорівнює  $R$ , індуктивність  $L$ . Знайти силу струму, що тече через соленоїд.
285. Надпровідне кільце, яке може рухатися тільки в вертикальному напрямку, лежить на столі над витком провідника. Через виток починає текти струм з силою  $I$ , внаслідок чого надпровідне кільце піднімається. Взаємна індуктивність витка та кільця, піднятого на висоту  $x$ , дорівнює  $L_{12}(x)$ . Індуктивність надпровідного кільця дорівнює  $L_{11}$ , його маса  $m$ . Знайти висоту  $h$ , на яку підніметься надпровідне кільце.
286. Кільце радіуса  $R = 50$  мм з тонкого дроту розмістили в однорідно-

му магнітному полі з індукцією  $B = 0,50$  мТл таким чином, що його площа стала перпендикулярною до напрямку поля. Після цього кільце охолодили до надпровідного стану і вимкнули магнітне поле. Знайти струм в кільці, якщо його індуктивність дорівнює  $L = 0,26$  мкГн.

287. Надпровідне кільце радіуса  $R$  з індуктивністю  $L$  знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$ . На початку площа кільця паралельна вектору  $\vec{B}$ , струм в кільці дорівнює нулю. Потім площину кільця повертають на  $90^\circ$  в положення, перпендикулярне полю. Знайти: а) струм в кільці після повороту; б) виконану при цьому роботу.
288. Невеличкий циліндричний магніт  $M$  знаходиться в центрі тонкої котушки радіуса  $a$ , яка містить  $N$  витків. Котушку підключено до балістичного гальванометра  $G$ . Опір всього кола дорівнює  $R$ . Знайти магнітний момент магніта  $M$ , якщо при видаленні його з котушки через гальванометр пройшла кількість електрики  $q$ . *Вказівка:* використати формулу для векторного потенціалу магнітного поля диполя.
289. Два нерухомих контура мають взаємну індукцію  $L_{12}$ . В одному з контурів почали змінювати струм за законом  $I_1 = \alpha t$ , де  $\alpha$  – стала,  $t$  – час. Знайти закон зміни струму  $I_2(t)$  в другому контурі, який має індуктивність  $L_2$  та опір  $R$ .
290. Тонкий провідний диск має провідність  $\gamma$  і розташований в змінному магнітному полі, вектор індукції якого  $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t + \varphi)$  спрямований перпендикулярно до площини диска. Знайти густину струмів Фуко, які індукуються в диску.
291. Магнітну індукцію  $\vec{B}_0$  між плоскими паралельними полюсами електромагніта можна вважати однорідною та сталою. В простір між полюсами вносять пластину площини  $S$  з парамагнітного матеріалу з парамагнітною сприйнятливістю  $\chi$ . Поверхня пластини паралельна поверхням полюсів електромагніта. Знайти силу, що діє на пластину.
292. Об'єм кулі однорідно заповнений зарядом  $Q$  та масою  $m$ . В початковий момент часу  $t_0 = 0$  вмикаються зовнішнє магнітне поле з вектором індукції  $\vec{B} = \vec{B}(t)$ , напрямком якого не змінюється, а величина в початковий момент дорівнює нулю. Просторовою залежністю вектора  $\vec{B}$  в межах кулі можна знехтувати. Під впливом магні-



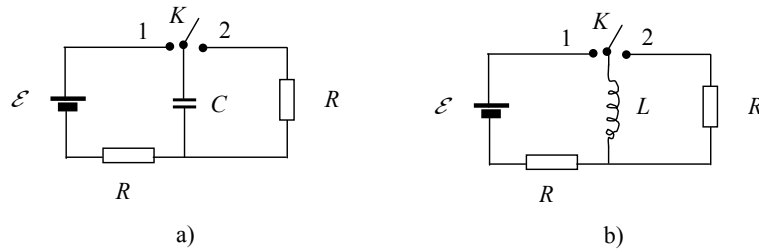


Рис. 51: Релаксаційні процеси.

тного поля куля починає обертатися. Визначити кутову швидкість  $\omega$  обертання, нехтуючи зворотнім впливом кулі, що обертається, на зовнішнє магнітне поле.

## 2. Релаксаційні процеси в колах з конденсатором та індуктивністю

### Теоретичний довідник

Зарядка конденсатора (Рис. 51 а, ключ в положенні 1):

$$U_C = \mathcal{E} (1 - e^{-t/RC}).$$

Розрядка конденсатора (Рис. 51 а, ключ в положенні 2):

$$U_C = U_0 e^{-t/RC}.$$

Струм в колі з індуктивністю, вмикання (Рис. 51 б, ключ в положенні 1):

$$I_L = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-tR/L}).$$

вимикання (Рис. 51 б, ключ в положенні 2):

$$I_L = I_0 e^{-tR/L}.$$

293. Конденсатор ємністю  $C = 400$  пФ підключили через опір  $R = 650$  Ом до джерела постійної напруги  $U_0$ . Через який час напруга на конденсаторі буде дорівнювати  $U = 0,9U_0$ ?

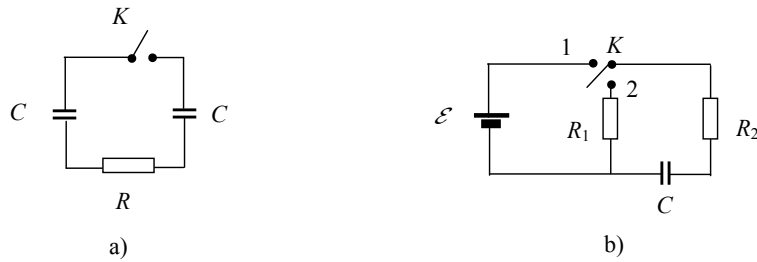


Рис. 52:

294. Конденсатор заповнено діелектриком з проникністю  $\varepsilon = 2,1$ . протягом часу  $\tau = 3$  хв. конденсатор втрачає половину наданого йому заряду. Вважаючи, що витік заряду відбувається тільки через діелектричний прошарок, знайти питомий опір останнього.
295. Коло складається з конденсатора  $C$  та опора  $R$  послідовно приєднаних до джерела ЕРС  $\mathcal{E}$  з нехтовно малим опором. В момент часу  $t = 0$  ємність конденсатора швидко зменшуються в  $\eta$  разів. Знайти струм в колі як функцію часу.
296. Котушку з індуктивністю  $L = 2,0$  мГн і активним опором  $R = 0,5$  Ом підключили до джерела сталого струму  $I_0 = 10$  мА. Через який час струм через котушку буде дорівнювати  $I = 8$  мА?
297. В колі, зображеному на Рис. 51 b (індуктивність котушки  $L$ , ЕРС джерела з нехтовно малим опором  $\mathcal{E}$ , зовнішні опори  $R$ ), в момент часу  $t = 0$  ключ перевели з положення 1 в положення 2. Знайти а) залежність від часу струму через котушку; б) повний заряд, що пройде через опір; в) кількість теплоти, що виділиться на опорі.
298. В колі, зображеному на Рис. 52 а), один з конденсаторів зарядили до напруги  $U_0$  і в момент  $t = 0$  замкнули ключ  $K$ . Знайти: струм  $I(t)$  як функцію часу; б) кількість теплоти, що виділилася на опорі.
299. Конденсатор ємністю  $C = 5,0$  мкФ підключили до джерела постійної ЕРС  $\mathcal{E} = 200$  В (Рис. 52b, ключ  $K$  замкнений на клему 1). Після цього ключ  $K$  перевели з клемми 1 на клему 2. Знайти кількість теплоти, що виділилася на резисторі з опором  $R_1 = 500$  Ом, якщо  $R_2 = 330$  Ом.

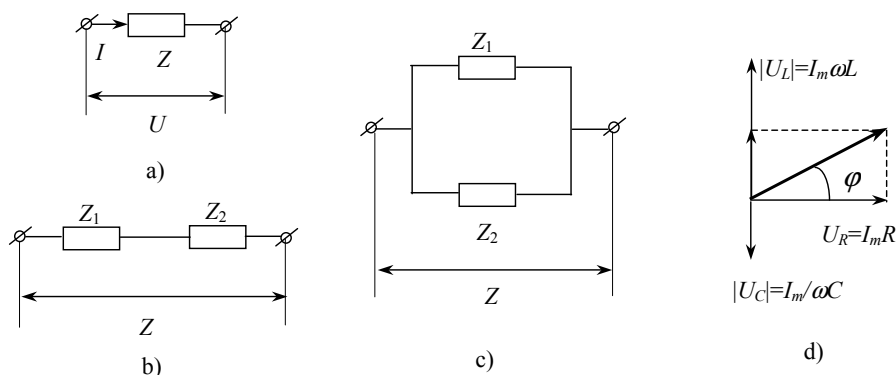


Рис. 53: Імпеданс.

### 3. Змінний струм. Імпеданс. Електромагнітні колювання

#### Теоретичний довідник

Закон Ома для ділянки кола зі змінним струмом (Рис. 53 а):  $U = IZ$ , де  $Z$  – імпеданс.

Імпеданс котушки індуктивності:  $Z_L = iX_L$ , де  $X_L = \omega L$  – реактивний опір котушки.

Імпеданс конденсатора  $Z_C = -iX_C$ , де  $X_C = 1/\omega C$  – реактивний опір конденсатора.

Закони Кірхгофа виконуються і для кіл зі змінним струмом:

- 1)  $\sum_k I_k = 0$ .
- 2)  $\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_l I_l R_l + \sum_s U_s$ , де  $\sum_k \mathcal{E}_k$  – сума всіх ЕРС, в т.ч. і ЕРС індукції, а  $\sum_s U_s$  – сума напруг на всіх конденсаторах.

При послідовному з'єднанні елементів (Рис. 53 б):  $Z = Z_1 + Z_2$ .

При паралельному з'єднанні елементів (Рис. 53 с):  $Z^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}$ .

Фазова діаграма для послідовного з'єднання елементів (Рис. 53 d):

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

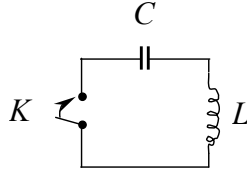


Рис. 54: Ідеальний коливальний контур.

Середня (за період) теплова потужність змінного струму на ділянці кола:

$$\langle P \rangle = I_g U_g \cos \varphi, \quad \text{де} \quad I_g = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U_g = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Ідеальний  $LC$  контур (Рис. 54), рівняння коливань:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

де колова частота  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , період коливань (формула Томпсона):  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ . Закон коливань:  $q(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ .

Коливальний контур з згасанням (Рис. 55 а), рівняння коливань:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

де  $\gamma = R/(2L)$  – коефіцієнт згасання. Якщо  $\gamma < \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , то закон коливань (Рис. 55 б):  $q(t) = a(t) \cos(\omega t + \alpha)$ , де  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ,  $a(t) = a_0 e^{-\gamma t}$ . Декремент згасання:

$$e^{\gamma T} = \frac{a(t)}{a(t+T)}.$$

Логарифмічний декремент згасання:  $\kappa = \gamma T$ .

Добротність:

$$Q = \frac{\pi}{\kappa} = \pi N_e,$$

де  $N_e$  – число коливань, за яке амплітуда коливань зменшується в  $e$  разів.

Вимушені коливання (Рис. 56 а), рівняння:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t),$$

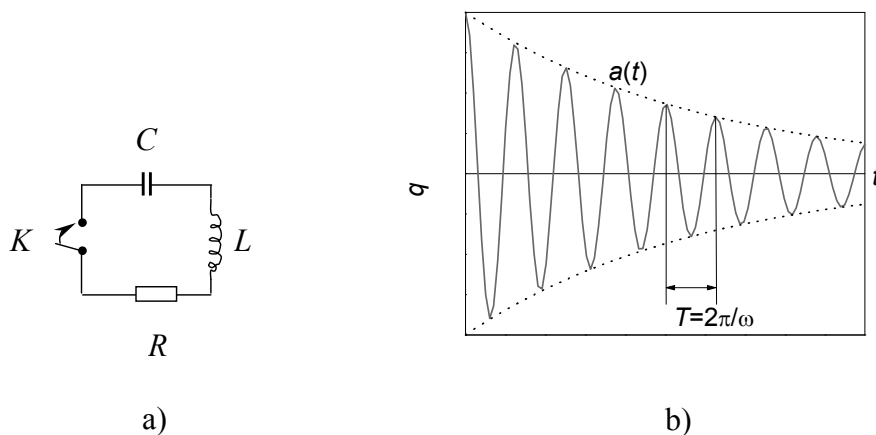


Рис. 55: Коливальний контур із згасанням.

де  $f(t) = \mathcal{E}/L$ . Якщо  $f(t) = f_0 \cos \Omega t$ , то (Рис. 56 б)

$$q(t) = a_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) + q_*, \quad q_* = A \cos(\Omega t - \beta).$$

Тут

$$\tan \beta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

Максимальні значення:

$$A_m = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}, \quad \Omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (2)$$

300. Отримати формулу Томпсона для ідеального  $LC$  контура (Рис. 54), виходячи з закону збереження енергії.
301. Показати, що в ідеальному коливальному контурі (Рис. 54) середня за період енергія електричного поля конденсатора дорівнює середній за період енергії магнітного поля котушки і становить половину повної енергії коливального контура:

$$\left\langle \frac{q^2}{2C} \right\rangle_T = \left\langle \frac{LI^2}{2} \right\rangle_T = \frac{W}{2}.$$

302. Для вимушених коливань (Рис. 56 а) довести формулу (2).

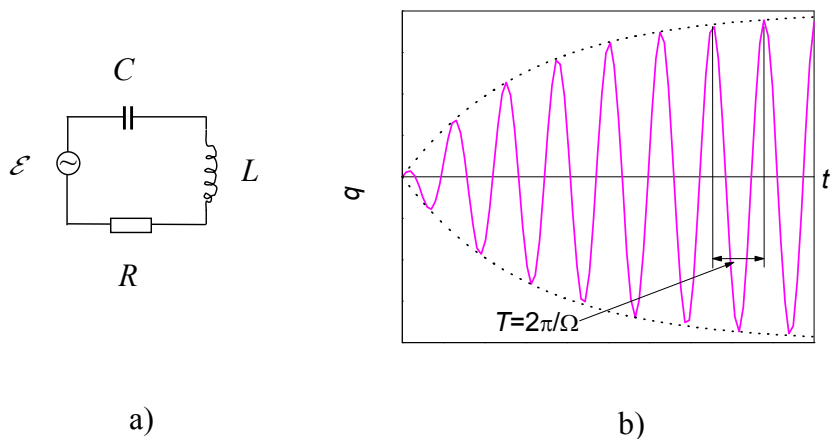


Рис. 56: Вимушені коливання

303. В коливальному контурі, зображеному на Рис. 56а, джерело ЕРС генерує напругу, що змінюється за законом косинуса з частотою  $\omega$ . Вважаючи, що амплітуда ЕРС фіксована, знайти частоту  $\omega$ , за якої стає максимальною напруга на а) конденсаторі; б) на котушці. Показати, що ці частоти пов'язані такими співвідношеннями:

$$\omega_{C_{\max}} < \omega_{L_{\max}}, \quad \omega_{C_{\max}} \cdot \omega_{L_{\max}} = \omega_0^2.$$

304. Дві однакові котушки, кожна з індуктивністю  $L$ , з'єднують а) послідовно; б) паралельно. Знайти індуктивність системи в обох випадках. Взаємною індуктивністю котушок знехтувати.
305. Знайти закон зміни з часом струму, що тече через індуктивність  $L$  (див. Рис. 57) після замикання ключа  $K$  в момент  $t = 0$ .

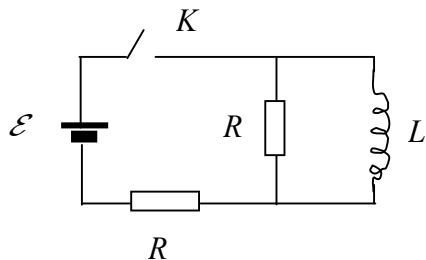


Рис. 57:

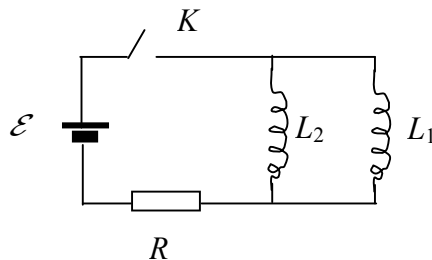


Рис. 58:

306. Знайти струми, що встановилися в котушках  $L_1, L_2$  (див. Рис. 58) після замикання ключа К. Опір  $R$  та ЕРС  $\mathcal{E}$  вважати відомими. Внутрішнім опором джерела ЕРС та опорами котушок знехтувати.
307. Котушку індуктивності  $L = 2,0$  мГн з опором  $R = 1,0$  Ом підключили до джерела сталої ЕРС  $\mathcal{E} = 1$  В. паралельно до котушки підключено опір  $R_0 = 2,0$  Ом. Знайти кількість теплоти, яка виділиться в котушці після того, як джерело ЕРС від'єднають від контуру. Внутрішнім опором джерела ЕРС знехтувати.
308. Коливальний контур складається з конденсатора ємності  $C = 4,0$  мкФ і котушки з індуктивністю  $L = 2,0$  мГн та активним опором  $R = 10$  Ом. Знайти відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент максимуму струму.
309. Коливальний контур складається з конденсатора ємності  $C = 100$  мкФ, котушки з індуктивністю  $L = 25$  мГн та активного опору  $R = 1,0$  Ом. Знайти кількість коливань, через яку амплітуда струму в цьому колі зменшиться в  $e$  разів.
310. Простір між обкладинками плоского конденсатора, що мають форму круглих дисків, заповнено однорідним середовищем із слабкою провідністю. Питома провідність середовища  $\sigma$ , діелектрична проникність  $\epsilon$ , відстань між обкладинками  $d$ . Нехтуючи крайовими ефектами, знайти напруженість магнітного поля між обкладинками на відстані  $r$  до їх осі, якщо на конденсатор подали змінну напругу  $U = U_m \cos \omega t$ .
311. Виходячи з основних рівнянь двопровідної лінії

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -L_1 \frac{\partial I}{\partial t},$$

показати, що: а) напруга  $U$  і струм  $I$  розповсюджуються вздовж лінії у вигляді хвилі і визначити її швидкість; б) хвильовий опір лінії  $\rho = \sqrt{L_1/C_1}$ .  $C_1, L_1$  – ємність і індуктивність одиниці довжини лінії.

312. Генератор змінного струму  $U = U_0 \cos \omega t$  передає енергію споживачу по довгому прямому аксіальному кабелю із нехтовно малим активним опором. Струм в колі змінюється за законом  $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ . Знайти середній за часом потік енергії через поперечний переріз кабелю. Зовнішню оболонку кабеля вважати тонкою.

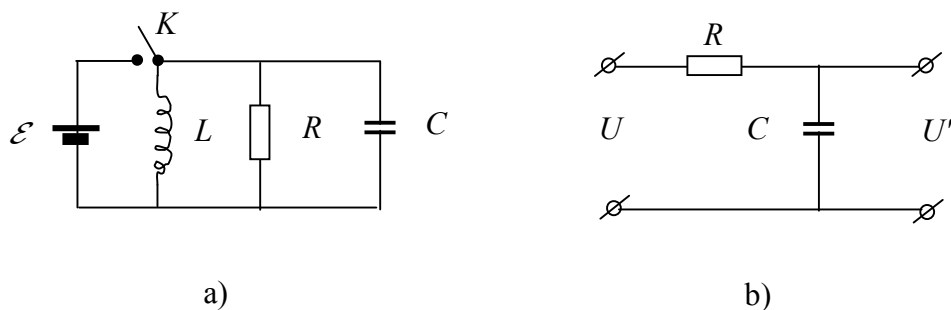


Рис. 59:

313. Змінний синусоїдальний струм частоти  $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$  тече по обмотці прямого соленоїда, радіус переріза соленоїда  $R = 6 \text{ см}$ . Знайти відношення амплітудних значень електричної та магнітної енергії всередині соленоїда.
314. Показати, що при малому згасанні добротність контуру, в якому відбуваються вимушені коливання,  $Q \approx \omega_0/\Delta\omega$ , де  $\omega_0$  – власна частота коливань,  $\Delta\omega$  – ширина резонансної кривої  $I(\omega)$  на висоті, яка в  $\sqrt{2}$  разів менша за амплітуду струму при резонансі.
315. Коло, що складається з послідовно з'єднаних конденсатора та активного опору  $R = 110 \text{ Ом}$ , під'єднали до змінної напруги з амплітудою  $U_m = 110 \text{ В}$ . При цьому амплітуда струму в колі встановилася рівною  $I_m = 0,50 \text{ А}$ . Знайти різницю фаз між струмом та зовнішньою наругою.
316. Знайти частоту згасаючих коливань в контурі, зображеному на Рис. 59 а), ключ  $K$  не замкнено. Вважати ємність  $C$ , індуктивність  $L$  і опір  $R$  відомими.
317. \* Для паралельного коливального контура з генератором, зображеного на Рис. 59 а) (ключ  $K$  замкнено) а) побудувати векторну діаграму струмів; б) за векторною діаграмою визначити зсув фази між струмом, що створюється генератором, та наругою; в) знати залежність амплітуди напруги від частоти  $\omega$  генератора; г) знайти резонансну частоту, при якій амплітуда напруги максимальна і значення максимальної амплітуди.
318. На Рис. 59 б) зображено найпростішу схему фільтра. На вхід подаються змінну наругу  $U(t) = U_0(1 + \cos \omega t)$ . Знайти а) вихідну наругу  $U'(t)$ ; б) значення  $RC$ , при якому амплітуда змінної скла-



дової напруги на виході буде в  $\eta = 7$  разів менша за сталу складову, якщо частота  $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$ . Які частоти відсікає цей фільтр – низькі чи високі?

# Завдання для розрахункової роботи

## А Електричне поле зарядів в вакуумі

Електричний заряд розподілено по об'єму та зовнішній поверхні тіла заданої форми з об'ємною густиною  $\rho(r)$  і поверхневою густиною  $\sigma$ . В роботі розглядаються такі тіла (в залежності від варіанта завдання):

1. Куля радіуса  $R_2$  (рис. 60);
2. Кульовий шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$  (рис. 61);
3. Нескінчений циліндр радіуса  $R_2$  (рис. 62);
4. Нескінчений циліндричний шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$  (рис. 63);
5. Нескінчений плоский шар товщини  $2d$  (рис. 64). Вісь  $x$  спрямована перпендикулярно площині шару і має початок в центрі шару.

Діелектрична проникність в усіх випадках  $\varepsilon = 1$ . Для всіх варіантів взяти:  $\rho_0 = 50 \text{ нКл/м}^3$ ;  $R_1 = 5 \text{ см}$ ;  $R_2 = 10 \text{ см}$ ;  $d = 5 \text{ см}$ .

Для заданого розподілу об'ємної густини заряду та значення  $\sigma$  (див. Табл. 1) за допомогою рівняння Максвелла в інтегральній формі розрахувати напруженість  $\vec{E}$  та потенціал  $\varphi$  електричного поля системи в усьому просторі та побудувати графіки залежностей  $\rho(r)$ ,  $E_r(r)$ ,  $\varphi(r)$  (для тіла 5 –  $\rho(x)$ ,  $E_x(x)$ ,  $\varphi(x)$ ).

Завдання виконують на папері формату А4 з одного боку, графіки (в ручному варіанті) – на міліметровому папері.

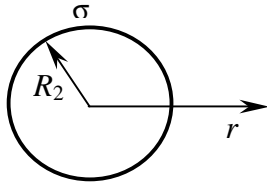


Рис. 60: Куля радіуса  $R_2$  з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ .

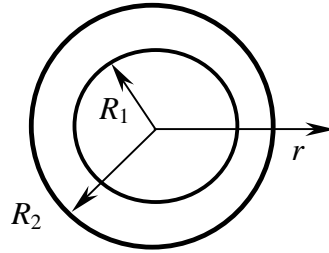


Рис. 61: Кульовий шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$ .

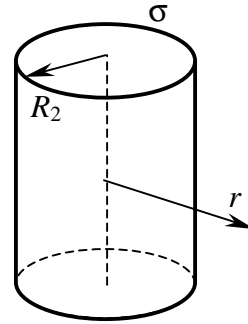


Рис. 62: Нескінчений циліндр радіуса  $R_2$  з поверхневою густиною заряду  $\sigma$ .

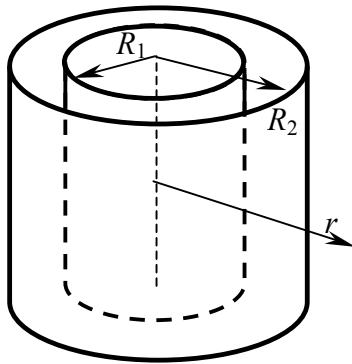


Рис. 63: Нескінчений циліндричний шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$ .

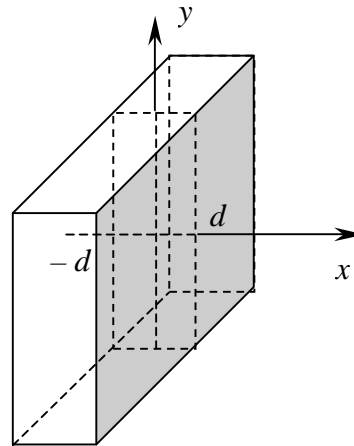


Рис. 64: Нескінчений плоский шар товщини  $2d$ .

### Порядок виконання завдання

1. Записати умову завдання та зробити рисунок для свого варіанту, записати параметри задачі згідно з таблицею варіантів.
2. На рисунку зобразити форму замкненої поверхні, що буде використана для розрахунку, показати на ній елементарну площадку та напрям вектора  $\vec{E}$ .
3. Отримати аналітичні вирази для  $E_r(r)$  (або  $E_x(x)$ ) для кожної з областей.
4. Отримати аналітичні вирази для  $\varphi(r)$  (або  $\varphi(x)$ ), вибравши нульовий рівень  $\varphi = 0$  (початок відліку) залежно від типу тіла на нескінченності (для кулі), на зовнішній поверхні циліндру або в центрі плоского шару.
5. Отримати числові формули для  $\rho(r)$  (або  $\rho(x)$ ),  $E_r(r)$  (або  $E_x(x)$ ),  $\varphi(r)$  (або  $\varphi(x)$ ); для цього підставити числові дані (в одиницях СІ) у відповідні вирази і виконати необхідні арифметичні дії. Навести відповідні вирази.
6. Розрахувати таблиці значень вказаних величин. Розрахунок вести з кроком 1,0 см в діапазонах<sup>2</sup>:  $r = [0; 20]$  см,  $x = [0; \pm 10]$  см.
7. За даними таблиць значень побудувати графіки  $\rho(r)$  (або  $\rho(x)$ ),  $E_r(r)$  (або  $E_x(x)$ ),  $\varphi(r)$  (або  $\varphi(x)$ ). Графіки розташувати на одному аркуші міліметрового паперу формату А4 один над одним, розмістивши осі координат на одній вертикалі та вибравши однакові масштаби по осях абцис ( $r$  чи  $x$ ). Масштаби по осях координат підібрати таким чином, аби було зручно відкладати точки, і щоб кожен графік займав приблизно 1/3 поля креслення.

---

<sup>2</sup> Для лінійних залежностей можна обмежитися лише двома крайніми точками.

Табл. 1: Просторова залежність об'ємної густини заряду  $\rho(r)$  та значення поверхневої густини заряду  $\sigma$  в нКл/м<sup>2</sup> для кожного з варіантів.

Варіант	Тіло	$\rho(r)$	$\sigma$ нКл/м <sup>2</sup>
1	Рис. 60	$\rho_0(r/R_2)$	0,5
2	Рис. 61	$\rho_0(R_2/r)$	
3	Рис. 62	$\rho_0(r/R_2)^2$	0,5
4	Рис. 63	$\rho_0(r/R_2)$	-2,0
5	Рис. 64	$\rho_0 \cos(\pi x/2d)$	0,5
6	Рис. 60	$\rho_0(r/R_2)^2$	-0,5
7	Рис. 61	$\rho_0(R_1/r)$	
8	Рис. 63	$\rho_0(r/R_1)$	-1,5
9	Рис. 61	$\rho_0(r/R_2)$	
10	Рис. 63	$\rho_0(r/R_2)^2$	
11	Рис. 62	$\rho_0(r/R_2)$	0,7
12	Рис. 64	$\rho_0(x/d)^2$	-0,5
13	Рис. 60	$\rho_0(r/R_1)$	-1,0
14	Рис. 63	$\rho_0(r/R_2)^2$	-0,5
15	Рис. 62	$\rho_0(r/R_1)^2$	-2,0
16	Рис. 63	$\rho_0(r/R_1)^2$	
17	Рис. 64	$\rho_0 \cos(\pi x/4d)$	-1,0
18	Рис. 60	$\rho_0(r/R_1)^2$	2,0
19	Рис. 61	$\rho_0(r/R_2)^2$	
20	Рис. 63	$\rho_0(R_2/r)$	
21	Рис. 62	$\rho_0(r/R_1)$	-1,5
22	Рис. 63	$\rho_0(R_1/r)$	
23	Рис. 61	$\rho_0(r/R_1)$	
24	Рис. 64	$\rho_0(x/d)^2$	0,5
25	Рис. 61	$\rho_0(r/R_1)^2$	

## Б Електричне поле об'ємно розподілених зарядів

Ізотропний діелектрик заданих розмірів та форми з діелектричною проникністю  $\varepsilon = \varepsilon(r)$  містить сторонні (вільні) заряди, які розподілені по його об'єму з густиною  $\rho(r)$ .

В роботі розглядаються такі тіла (в залежності від варіанта завдання):

1. Куля радіуса  $R_2$  (рис. 65);
2. Кульовий шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$  (рис. 66);
3. Нескінчений циліндр радіуса  $R_2$  (рис. 67);
4. Нескінчений циліндричний шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$  (рис. 68);
5. Нескінчений плоский шар товщини  $2d$  (рис. 69). Вісь  $x$  спрямована перпендикулярно площині шару і має початок в центрі шару.

Діелектрична проникність як функція координат задана в Табл. . Для всіх варіантів взяти:  $\rho_0 = 50 \text{ нКл/м}^3$ ;  $R_1 = 1 \text{ см}$ ;  $R_2 = 2 \text{ см}$ ;  $R = 3 \text{ см}$ ;  $d = 1 \text{ см}$ . Для заданого розподілу об'ємної густини заряду та діелектричної проникності (див. Табл. 2) за допомогою рівняння Максвелла в інтегральній формі, матеріальних співвідношень та граничних умов розрахувати залежності радіальних компонент векторів індукції  $D_r(r)$  та напруженості  $E_r(r)$  електричного поля, електричного потенціалу  $\varphi(r)$  у всьому просторі (для тіла 5 –  $D(x)$ ,  $E_x(x)$ ,  $\varphi(x)$ ), а також розрахувати енергію поля  $W$  в діелектрику та енергію поля  $W_0$  поза його межами. Крайовими ефектами знехтувати.

Завдання виконують на папері формату А4 з одного боку, графіки (в ручному варіанті) – на міліметровому папері.

### Порядок виконання завдання

1. Записати умову завдання та зробити рисунок для свого варіанту, записати параметри задачі згідно з таблицею варіантів.

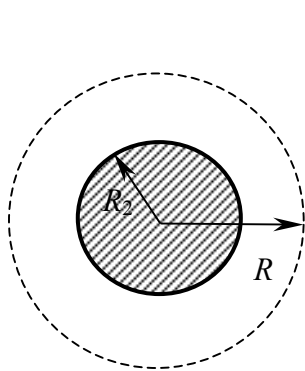


Рис. 65: Діелектрична куля радіуса  $R_2$ .

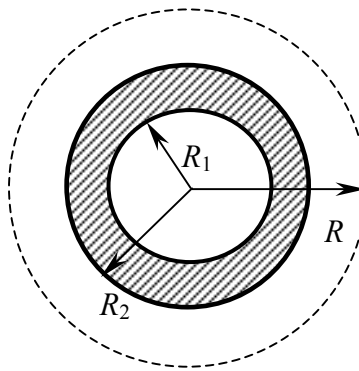


Рис. 66: Діелектричний кульовий шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$ .

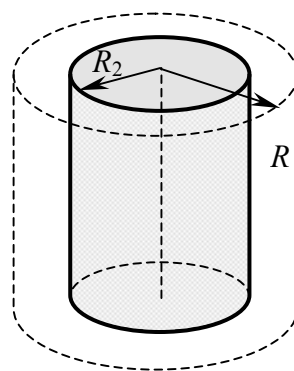


Рис. 67: Діелектричний нескінчений циліндр радіуса  $R_2$ .

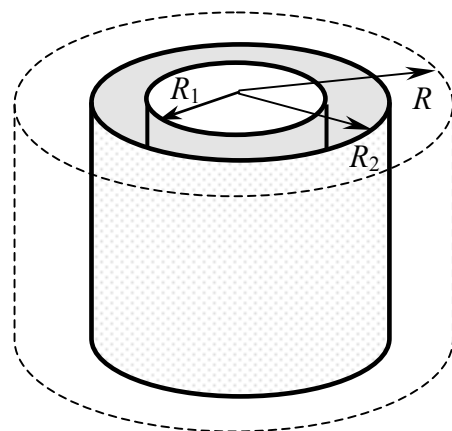


Рис. 68: Діелектричний нескінчений циліндричний шар із зовнішнім радіусом  $R_2$  та внутрішнім радіусом  $R_1$ .

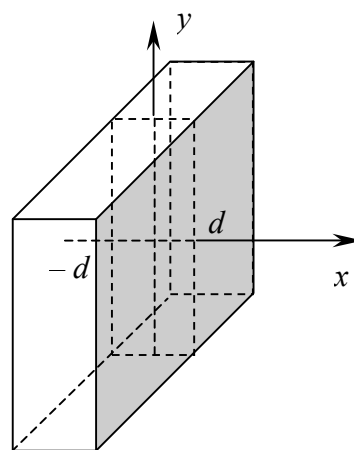


Рис. 69: Діелектричний нескінчений плоский шар товщини  $2d$ .

2. На рисунку зобразити форму замкненої поверхні, що буде використана для розрахунку, показати на ній елементарну площадку та напрямки векторів  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ .
3. Розрахувати аналітично просторові залежності радіальних компонент векторів індукції  $D_r(r)$  та напруженості  $E_r(r)$  електричного поля у всьому просторі (для тіла 5 –  $D(x)$ ,  $E_x(x)$ ).
4. Розрахувати аналітично просторову залежність потенціалу  $\varphi(r)$  у всьому просторі (для тіла 5 –  $\varphi(x)$ ). Нульову точку  $P_0$ , в якій  $\varphi(P_0) = 0$ , вибрати:
  - на нескінченості для тіл 1, 2;
  - на зовнішній поверхні діелектрика для тіл 3, 4;
  - в точці  $x = 0$  для тіла 5.
5. Представити залежності  $\rho(r)$ ,  $\varepsilon(r)$ ,  $D_r(r)$ ,  $E_r(r)$  та  $\varphi(r)$  в чисельному вигляді (в одиницях СІ), розрахувати таблиці значень. Розрахунок вести з кроком 1,0 мм в діапазонах:  $r = [0; 30]$  мм,  $x = [0; \pm 20]$  мм.
6. За даними таблиць значень побудувати графіки  $\rho(r)$ ,  $\varepsilon(r)$ ,  $D_r(r)$ ,  $E_r(r)$  та  $\varphi(r)$ . Графіки розташувати на двох аркушах міліметрового паперу формату А4 один над одним, розмістивши осі координат на одній вертикалі та вибравши однакові масштаби по осях абсцис ( $r$  чи  $x$ ). Вказати вертикальними штриховими лініями границі діелектрика. Масштаби по осях координат підібрати таким чином, аби було зручно відкладати точки, і щоб кожен графік займав приблизно 1/3 поля креслення.
7. Розрахувати повну енергію  $W$  поля всередині діелектрика (для тіл 1, 2), енергію  $w$  поля на одиницю довжини діелектрика (для тіл 3, 4), або на одиницю поверхні (для тіла 5).
8. Розрахувати енергію  $W_0$  поля поза межами діелектрика:
  - в сферичному шарі  $R_2 \leq r \leq R$  для тіл 1, 2;
  - в циліндричному шарі  $R_2 \leq r \leq R$  висоти  $\ell = 1$  см для тіл 3, 4;
  - в кубі з ребром  $d$ , причому  $d \leq x \leq 2d$  для тіла 5.



Табл. 2: Просторова залежність об'ємної густини заряду  $\rho(r)$  та діелектричної проникності  $\varepsilon(r)$  для кожного з варіантів.

Варіант	Тіло	$\rho(r)$	$\varepsilon(r)$	$b$	$\alpha$
1	1	$\rho_0$	$\alpha + r^2/b^2$	$R_1$	2,00
2	2	$\rho_0$	$r/b$	$2R_1/3$	-
3	3	$\rho_0$	$(\alpha + r/b)^{-1}$	$5R_1$	0,20
4	4	$\rho_0 r/b$	$\alpha$	$R_1$	2,00
5	5	$\rho_0$	$\alpha + x^2/b^2$	$2R_1/3$	1,00
6	1	$\rho_0$	$\alpha \exp(r/b)$	$R_1/\ln 2$	1,50
7	2	$\rho_0 r/b$	$\alpha$	$R_1$	3,00
8	3	$\rho_0$	$\alpha - r^2/b^2$	$R_1/2$	6,00
9	4	$\rho_0 b/r$	$\alpha$	$R_1$	2,500
10	5	$\rho_0$	$(\alpha - x/b)^{-1}$	$6R_1$	0,50
11	1	$\rho_0$	$(\alpha - r/b)^{-1}$	$1,5R_1$	1,00
12	2	$\rho_0 b/r$	$\alpha$	$R_1$	2,00
13	3	$\rho_0$	$\alpha \exp(-r/b)$	$R_1/\ln 3$	6,00
14	4	$\rho_0$	$r/b$	$R_1$	-
15	5	$\rho_0$	$\alpha - x^2/b^2$	$2R_1/3$	4,25
16	1	$\rho_0$	$\alpha - r^2/b^2$	$2R_1/3$	4,25
17	2	$\rho_0$	$r^2/b^2$	$R_1$	-
18	3	$\rho_0$	$\alpha \exp(r/b)$	$R_1/\ln 2$	1,50
19	4	$\rho_0$	$r^2/b^2$	$R_1$	-
20	5	$\rho_0$	$\alpha \exp(x/b)$	$R_1/\ln 2$	1,50
21	1	$\rho_0$	$(\alpha + r/b)^{-1}$	$4R_1$	0,25
22	2	$\rho_0 b^2/r^2$	$\alpha$	$R_1$	1,50
23	3	$\rho_0$	$\alpha + r^2/b^2$	$2R_1/3$	1,00
24	4	$\rho_0$	$r^3/b^3$	$R_1$	-
25	5	$\rho_0$	$(\alpha + x/b)^{-1}$	$4R_1$	0,40
26	1	$\rho_0$	$\alpha \exp(-r/b)$	$R_1/\ln 3$	6,00
27	2	$\rho_0$	$r^3/b^3$	$R_1$	-
28	3	$\rho_0$	$(\alpha - r/b)^{-1}$	$6R_1$	0,50
29	4	$\rho_0 b^2/r^2$	$\alpha$	$1,25R_1$	2,00
30	5	$\rho_0$	$\alpha \exp(-x/b)$	$R_1/\ln 2$	3,00

## В Згасаючі та вимушені коливання

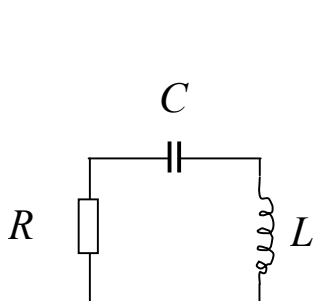


Рис. 70: Коливальний контур, в якому спостерігаються вільні коливання.

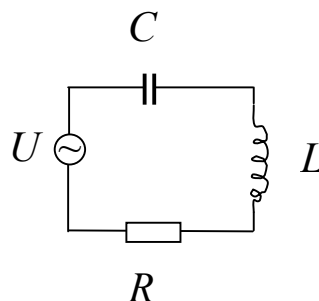


Рис. 71: Коливальний контур з генератором.

На рис. 70 та 71 зображено коливальний контур  $RLC$ , для якого відомі (див. табл. 3, 4, 5): власна колова частота контура  $\Omega_0 = (LC)^{-1/2}$  за відсутності опору, опір  $R$ , критичний опір (тобто, такий активний опір кола, при якому колова частота  $\omega$  коливань дорівнює нулю)  $R_{\text{crit}}$ . Генератор створює змінну напругу  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(2\pi\nu t)$  з фіксованою амплітудою  $\mathcal{E}_0$  та регульованою частотою  $\nu$ . В подальшому позначимо  $\omega \equiv 2\pi\nu$ .

### ЗАВДАННЯ

1. За відомими формулами знайти для контуру  $RLC$  індуктивність  $L$ , ємність  $C$ , коефіцієнт згасання, добротність  $Q$ .
2. Скласти диференціальне рівняння коливального контура з генератором.
3. З рівняння або з векторної діаграми отримати вираз для  $I_0 = I_0(\omega)$ , тобто, залежності амплітудного значення струму в контурі від частоти генератора.
4. Отримати вираз та розрахувати значення резонансної колової частоти  $\omega_{\text{res}}$  та максимальної амплітуди струму  $I_{0\text{max}}(\omega_{\text{res}})$  в контурі.
5. В інтервалі  $\omega \in [0, 2\Omega_0]$  задати 20 (не більше!) значень колової частоти генератора (це відповідає експериментальній ситуації) і за

формулою розрахувати таблицю значень  $I_0 = I_0(\omega)$ . Побудувати графік  $I_0 = I_0(\omega)$  на міліметровому папері (“вручну”). Масштаб по осі  $I_0$  вибирати таким чином, щоб графік займав всю площу рисунка. Одиниці вимірювання підібрати таким чином, щоб ціна найменшої поділки на осях відповідала одиницям або 10 (а не 0,01 або 0,001), наприклад, частоту вимірювати в кГц, а не в Гц, струм в мА, а не А і т.і. На полі графіка обов’язково вказати числові значення резонансної частоти та резонансної амплітуди струму.

6. За графіком знайти “експериментальне значення” добротності

$$Q_* = \frac{\Omega_0}{\Delta\Omega},$$

де  $\Delta\Omega$  визначається як різниця частот, при яких амплітуда струму дорівнює  $I_{0max}/\sqrt{2}$ . Обчислити також добротність за теоретичною формулою

$$Q = \frac{\Omega_0}{2\beta}$$

і визначити похибку  $\eta = 100\% \cdot (Q - Q_*)/Q$ .

7. Розрахувати імпеданс контура на частоті  $\nu$ .
8. Розрахувати зсув фази  $\varphi$  між струмом та напругою на генераторі (при частоті  $\nu$ ).
9. Розрахувати діючі значення  $I_g$ ,  $\mathcal{E}_g$  струму та напруги і обчислити потужність, яку споживає контур:

$$\langle P \rangle = \mathcal{E}_g I_g \cos \varphi.$$

10. Побудувати (на міліметровому папері) векторну діаграму кола на частоті  $\nu$  та з’ясувати, яким навантаженням (ємнісним чи індуктивним) є коло для генератора.
11. З рівняння контура або з векторної діаграми отримати вираз для залежності  $\mathcal{E}_C(\omega)$  амплітуди напруги на конденсаторі від колової частоти генератора.

Табл. 3: Данні для розрахунків, група ФІ-1

N	$\Omega_0, 10^3 \text{с}^{-1}$	$R, \text{Ом}$	$R_{\text{crit}}, \text{Ом}$	$\nu, \text{кГц}$	$\mathcal{E}_0, \text{В}$
1-1	4,7	7,7	42,4	0,5	1
1-2	33,3	20	66,7	3,6	5
1-3	56,0	25	89,4	12	2
1-4	235,7	2	9,4	30	1
1-5	120	45	167	13	4,5
1-6	527	23	95	100	4,6
1-7	26,0	1,7	7,7	2,5	0,5
1-8	9,5	1,7	10,5	1,9	0,3
1-9	18,7	35	142,4	2	7
1-10	4,47	0,8	4,47	0,8	0,2
1-11	1,77	2	14,1	0,3	1
1-12	15	9	90	1,5	3
1-13	58	16	70	6,9	1,6
1-14	354	112	566	48	5,6
1-15	5,16	8,8	48,5	0,8	2,2

12. Отримати вираз та обчислити резонансну колову частоту  $\omega'_{res}$  та резонансну амплітуду  $\mathcal{E}_{Cmax}(\omega'_{res})$  напруги на конденсаторі. Визначити, наскільки відсотків  $\omega'_{res}$  відрізняється від власної частоти контура  $\Omega_0$ .
13. Розрахувати таблицю значень та побудувати (як в п.5) амплітудну характеристику напруги на конденсаторі  $\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_C(\omega)$ .
14. З графіка  $\mathcal{E}_C(\omega)$  визначити добротність контура  $Q'$ . Знайти відносну похибку отриманого значення.

Табл. 4: Данні для розрахунків, група ФІ-2

N	$\Omega_0, 10^3 \text{с}^{-1}$	$R, \text{Ом}$	$R_{\text{crit}}, \text{Ом}$	$\nu, \text{кГц}$	$\mathcal{E}_0, \text{В}$
2-1	1,21	10	60,3	0,2	2
2-2	4,71	7,7	42,4	0,5	1
2-3	1,8	2,5	18	0,3	0,2
2-4	100	14,6	80	6,4	3,6
2-5	7,4	17,6	67	1,1	4,3
2-6	82	712	4900	14	20
2-7	47,1	18	70,7	5,5	0,9
2-8	105	14	63,2	21	5,6
2-9	1,09	11	61	0,2	2,2
2-10	1291	43	1543	190	4,3
2-11	0,550	10	72,7	0,1	1
2-12	0,377	10	58	0,07	1,5
2-13	35	35	573	6,5	3,5
2-14	163	2,9	16,3	32	0,4
2-15	5,35	1,5	5,35	0,6	0,3

Табл. 5: Данні для розрахунків, група ФІ-3

N	$\Omega_0, 10^3 \text{с}^{-1}$	$R, \text{Ом}$	$R_{\text{crit}}, \text{Ом}$	$\nu, \text{кГц}$	$\mathcal{E}_0, \text{В}$
3-1	45,36	300	4899	8	15
3-2	33,4	20	66,3	3,6	5
3-3	25,5	1,7	7,75	2,5	0,5
3-4	4,47	0,8	4,47	0,8	0,2
3-5	57,7	16	69,28	6,9	1,6
3-6	1,09	11	61	0,2	2,2
3-7	163	2,9	16	32	0,4
3-8	4,7	7,7	42	0,5	1
3-9	7,45	17,6	67,1	1,1	4,3
3-10	1,2	10	60,3	0,2	2
3-11	34	35	573	6,5	3,5
3-12	236	2	9,43	30	1
3-13	100	14,6	80	6,4	3,6

# Відповіді

Відповіді наведені не до всіх задач.

- 12 *Вказівка:* скористатися формою релятивістського рівняння руху для випадку, коли вектор сили паралельний вектору швидкості.  
 $x_{\text{зуп}} = 2E_0/\varepsilon$ ,

$$v = c\sqrt{1 - \exp\left(\frac{\alpha x}{c^2}(\varepsilon x - 2E_0)\right)}.$$

21

$$F = \frac{\mu_0 a^2 I_1 I_2}{2\pi r(r+a)}.$$

- 28 а)  $\vec{B} = -\mu_0 \vec{i} \times \vec{e}_z z / (2|z|)$ ; б)  $\vec{B} = 0$  при  $|z| > \ell$ ,  $\vec{B} = -\mu_0 \vec{i} \times \vec{e}_z$  при  $|z| < \ell$ .

- 29  $\vec{B} = \mu_0 \vec{i} \times \vec{e}_z$  при  $|z| > \ell$ ,  $\vec{B} = 0$  при  $|z| < \ell$ .

72

$$|\Phi| = \frac{q}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/a)^2}} \right).$$

- 73  $|\Phi| = \lambda R / 2\varepsilon_0$ .

- 78  $\Phi = q / (24\varepsilon_0)$ .

80

$$r = \frac{a}{\exp \frac{2\pi\Phi_0}{\mu_0 I a} - 1}.$$

82 а)  $\Phi_{\vec{E}} = 4\pi a R^5/5$ ; б)  $\Phi_{\vec{E}} = 12\pi a R^5/5$ ; в)  $\Phi_{\vec{E}} = 4\pi a R^2$ .

98 Дротинка буде обертатися, якщо ротор швидкості відмінний від нуля. У випадку б)  $T = 39$  с,  $L = 165$  м.

124 *Вказівка:* Для того, щоб перетворити навколишній простір в однозв'язну область, необхідно натягнути на контур  $\mathcal{L}$  довільну поверхню  $S$ . Розглянути циркуляцію магнітного поля по контуру, який перетинає поверхню  $S$ .

126 *Вказівка:* розглянути поля такого вигляду  $\vec{E} = f(r^2, t)\vec{r}/r$ ,  $\vec{B} = g(r^2, t)\vec{r}/r$ .

129

$$\vec{\Pi} = \frac{b^2}{\omega} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2 \vec{k}, \quad W = \frac{b^2}{c^2} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)^2.$$

133  $\varphi = -kxy + \text{const}$ ,  $\vec{A} = (kxz, -kyz, 0)$ ,  $\vec{A}' = k(-x^2 + y^2)\vec{e}_z/2$ .

134  $A_z = \mu_0 j(R^2 - r^2)/4$  при  $r \leq R$ ,  $A_z = \mu_0 j R \ln(R/r)/2$  при  $r > R$ , де  $r$  – відстань від осі циліндра.

135  $B(r) = -\varepsilon_0 \mathcal{E} \omega(\Delta) r \cos(\omega t)/(2d^2)$ .

136  $Q = CU \exp(-\gamma t/\varepsilon_0 \varepsilon)$ ,  $I_{\text{зм}} = -(\gamma/\varepsilon_0 \varepsilon) CU \exp(-\gamma t/\varepsilon_0 \varepsilon)$ .

137 *Вказівка:* Скористатися законом Ома в диференціальній формі  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  і рівнянням неперервності в циліндричній системі координат. Розв'язок шукати у вигляді  $\varphi = Ar^k + B$ .

$$\varphi(r) = U \frac{(b/r)^n - 1}{(b/a)^n - 1}, \quad R = \frac{(b/a)^n - 1}{2\pi\sigma_{\text{max}}}.$$

138  $j_r = j_\theta = 0$ ,  $j_\varphi = 2ar \sin \theta/\mu_0$  при  $r \leq R$ ,  $j_\varphi = 0$  при  $r > R$ .

139  $j_r = j_z = 0$ ,  $j_\varphi = 4ar/\mu_0$  при  $r \leq R$ ,  $j_\varphi = 0$  при  $r > R$ .

140  $i_r = i_\theta = 0$ ,  $i_\varphi = 3a \sin \theta/\mu_0$  при  $r \leq R$ ,  $j_\varphi = 0$  при  $r > R$ .

143  $\Phi_E = \pi^2 a R^8 (\sqrt{2} - 1)/8\sqrt{2}$ .

- 144 Нерелятивістське наближення має чинність при  $\ell \gg ke^2/(mc^2) = 2,8 \cdot 10^{-15}$  м

$$v = c \frac{\sqrt{1 + 2mc^2\ell/ke^2}}{1 + mc^2\ell/ke^2}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

- 145  $\rho(r) = e[\delta(\vec{r}) - \epsilon_0\lambda^2 e^{-\lambda r}/r], Q = 0.$

- 149  $E_x = E_y = 0,$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + R^2} - |z| \right), \quad E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right),$$

$$\varphi = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0|z|}, \quad E_z = \frac{\sigma R^2 z}{4\epsilon_0|z|^3}, \quad \text{при } |z| \gg R.$$

- 150 *Вказівка:* розв'язок рівняння Лапласа шукати у вигляді суми розв'язків типу  $\varphi(x, y) = X(x) \cdot Y(y).$

$$\varphi = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)\pi y/b]}{2k+1} \exp\left(-\frac{(2k+1)\pi x}{b}\right).$$

- 151  $\rho(r) = const, \nu = 2,5 \cdot 10^{15}$  Гц.

- 152  $B=0,33$  Тл.

- 153  $B(r) = (\mu_0 J r / \pi a^2)(1 - r^2/a^2)$  при  $r < a$ ,  $B(r) = (\mu_0 J / \pi r)$  при  $r > a$ .

- 154  $q = 2\pi\alpha R^2, E = \alpha/2\epsilon_0, b = \alpha R^2/\epsilon_0.$

- 155  $\vec{E} = \vec{a}R^2/6\epsilon_0.$

- 171  $\rho(r) = \delta(r) - \epsilon_0\lambda^2 \exp(-\lambda r)/r.$

- 184  $\vec{B} = \mu_0 Q \vec{\omega} / (4\pi R),$  збільшиться в 1,5 рази.

- 185

$$A_z = \begin{cases} -\mu_0 I r^2 / (4\pi R^2) + const & r < R, \\ (\mu_0 I / 2\pi) \ln(r/R) + const & r > R. \end{cases}$$



186

$$\vec{B} = \begin{cases} (1/2)\mu_0\rho\vec{v} \times \vec{r} & r < R, \\ (1/2)\mu_0\rho R^2\vec{v} \times \vec{r}/r^2 & r > R. \end{cases}$$

187  $B = \mu_0 n I / (4R)$ , напрямлений перпендикулярно до площини витків.

198

$$W = \frac{2q^2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right] = 2 \frac{q^2}{a} (1 - \ln 2).$$

212  $\vec{P}_m = IS\vec{n}$ , де  $\vec{n}$  – одиничний вектор нормалі до поверхні контура.216  $\vec{B} = \mu_0 \sigma R^4 \vec{\omega} / (8|z|^3)$  при  $z \gg R$ ,  $\vec{P}_m = \pi \sigma R^4 \vec{\omega} / 4$ ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \sigma \vec{\omega} |z| \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{1/2} + \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-1/2} - 2 \right].$$

217  $\vec{P}_m = QR^2 \vec{\omega} / 8$ .218  $\vec{P}_m = -e\vec{M} / (2m)$ .

223

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{\rho g(r_2^2 - r_1^2) \ln(r_2/r_1)}.$$

224

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{\ell}{\sqrt{4a^2 + \ell^2}} \right).$$

225

$$\vec{E} = -\frac{\vec{P}\ell}{2\varepsilon_0\sqrt{4a^2 + \ell^2}}.$$

226

$$\varphi = \frac{\varphi_1\gamma_1(d-a) + \varphi_2\gamma_2a}{\gamma_1(d-a) + \gamma_2a}, \quad \sigma = \frac{\varphi_1 - \varphi_2)(\gamma_1\varepsilon_1 + \gamma_2\varepsilon_2)}{\gamma_1(d-a) + \gamma_2a}.$$

246  $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)B\omega\vec{r}$ ,  $\sigma^* = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)B\omega R$ .256  $R = 2\alpha / (\pi a^4)$ ,  $E = 2\alpha I / (\pi a^4)$ .

257

$$E = \frac{\alpha U}{1 + \alpha x} \ln(1 + \alpha h), \quad C = \frac{S \varepsilon_0 \alpha}{\ln(1 + \alpha h)}.$$

262

$$j = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0}{\ell^2} \sqrt{2q_{sp}} U^{3/2}.$$

276  $a = g/(1 + B^2 \ell^2 C/m).$

279 а)  $v = U/(B\ell)$ ; б)  $v(t) = U/(B\ell)[1 - \exp(-B^2 \ell^2 t/mR)]$ ; в)  $v = (UB\ell - FR)/(B\ell)^2$ ,  $\alpha = 1 - FR/(UB\ell).$

284  $I = \pi b^2 n B \omega (R^2 + \omega^2 L^2)^{-1/2} \sin(\omega t + \varphi_0).$

285  $h = I^2 [L_{12}^2(0) - L_{12}^2(h)] / (2mgL_{11}).$

290  $\vec{j} = (1/2)\gamma\omega\vec{B}_0 \times \vec{r} \sin(\omega t + \varphi).$

291  $F = \chi S B_0^2 / [2\mu_0(1 + \chi)].$

292  $\vec{\omega} = -Q\vec{B}/(2m).$

304 а)  $2L$ ; б)  $L/2.$

# Бібліографія

- [1] Астахов А.В., Широков Ю.М. Электромагнитное поле.– М.: “Наука”, 1980. – 360 с.
- [2] Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. – М.: “Выш.шк.”, 1983. – 463 с.
- [3] Иродов И.Е. "Электромагнетизм: основные законы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 320 с.
- [4] Парселл Э. Электричество и магнетизм: Учебное руководство. – М.: “Наука”. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1983.– (Берклевский курс физики). – 416 с.
- [5] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т. 5. Электричество и магнетизм. – М.: “Мир”, 1966. – 300 с.
- [6] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т. 6. Электродинамика. – М.: “Мир”, 1966. – 343 с.
- [7] Федорченко А. М. Класична механіка і електродинаміка – К. : “Вища школа”, 1992.
- [8] Калашников С.Г. Электричество. – М.: “Наука”, 1977.
- [9] Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 432 с.
- [10] Поливанов К.М. Электродинамика движущихся тел. – М.: “Энергоиздат”, 1982.
- [11] Бригинец В. П., Гусева О.О. Методические указания по организации самостоятельной работы по физике. – К.: НТУУ “КПИ 1988.

# Додатки

## Н Вимоги до розрахункової роботи

Розрахункова робота здається студентами в кінці семестру в окремому зошиті і включає розв'язки всіх задач з поясненнями, лекційні вправи, а також короткий конспект основних теоретичних положень (згідно переліку, наведеного нижче). Правила оформлення: вказати номер задачі за задачником, скорочену (або, за бажанням, повну) умову задачі, розв'язок, числові розрахунки, відповідь. Розв'язання задач повинно містити пояснення фізичного змісту та обчислення. Конспект теоретичних положень складається по будь-яким джерелам і містить коротке визначення поняття, основні формули із поясненням символів та відповідних розмірностей фізичних величин, формулювання законів (положень та границь їх застосування (в разі необхідності)).

### 1. Оформлення титульного листа

Розрахункова робота з загальної фізики  
розділ “Електродинаміка”  
студента 1-го курсу групи ФІ-81  
Іванова Петра Степановича  
2003/2004 н.р.

Особистий підпис  
Перевірив:  
Оцінка:

## 2. Приклад оформлення завдання

**Задача 1.** Тонке напівкільце радіуса  $R=20$  см заряджено рівномірно зарядом  $q=0,70$  нКл. Знайти модуль напруженості електричного поля в центрі кривизни цього напівкільця.

Дано:  $R=20$  см

$q=0,70$  нКл

Знайти:  $\vec{E}$ -?

**Розв'язок:** Скористаємося загальним виразом для електричного поля точкового заряду:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{R}}{R^3}.$$

Розіб'ємо напівкільце на малі елементи із зарядом  $dq = \sigma R d\theta$ , де введено густину заряду

$$\sigma = \frac{q}{\pi R}.$$

Елемент кільця  $Rd\theta$  створює в центрі кільця поле, яке лежить в площині кільця і спрямоване вздовж його радіуса. Виберемо вісь  $x$  вздовж діаметра, на який спирається напівкільце, а вісь  $y$  – в перпендикулярному напрямку. Із міркувань симетрії очевидно, що компоненти поля  $E_x = 0$ ,  $E_z = 0$ . Компоненту вздовж осі  $y$  знайдемо за принципом суперпозиції, тобто, як суму полів від елементарних зарядів:

$$E_y = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma}{R^2} \int_0^{\pi/2} R \cos \theta d\theta = \frac{\sigma}{2R\pi\epsilon_0}$$

Підставивши вираз для густини заряду, остаточно отримуємо:

$$|\vec{E}| = \frac{q}{2R^2\pi^2\epsilon_0} = \frac{7 \cdot 10^{-10}}{2 \cdot 0,2^2 \cdot 3,14^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 100 \text{ В/м}$$

**Відповідь:**  $|\vec{E}|=0,1$  кВ/м.