

# 1. Оператори у квантовій механіці

1.1. Для довільних операторів  $\hat{A}$  і  $\hat{B}$  довести справедливості співвідношень

а)  $[\hat{A}, \hat{A}^n] = 0$ ;

б)  $\hat{A}^{-1} \hat{B}^2 \hat{A} = (\hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A})^2$ ;

с)  $\hat{A}^{-1} \hat{B}^n \hat{A} = (\hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A})^n$ ;

д)  $\hat{A}^{-1} f(\hat{B}) \hat{A} = f(\hat{A}^{-1} \hat{B} \hat{A})$ , де  $f(\hat{B})$  - довільна функція від оператора, яка визначається як наступний ряд  $f(\hat{B}) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \hat{B}^n$ .

1.2. Довести, що для операторів, які задовольняють умові  $[\hat{L}, \hat{M}] = 1$ , виконуються наступні співвідношення

а)  $\hat{M} \hat{L}^{n+1} - \hat{L}^{n+1} \hat{M} = -(n+1) \hat{L}^n$ ;

б)  $f(\hat{L}) \hat{M} - \hat{M} f(\hat{L}) = f'(\hat{L})$ .

1.3. Довести, що  $e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} = \hat{B} + C \xi$ , якщо  $[\hat{B}, \hat{A}] = C$ , де  $C$  - число та  $\xi$  - довільний параметр.

1.4. Довести, що оператор  $\exp[i\hat{p}a/\hbar]$  (де  $\hat{p}$  - оператор імпульсу), є оператором зсуву, тобто:  $e^{i\hat{p}a/\hbar} \hat{F}(x) e^{-i\hat{p}a/\hbar} = \hat{F}(x+a)$ , де  $x$  - координата, а  $a$  довільний (не обов'язково малий) зсув.

1.5. Довести, що оператор  $e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar}$  (де  $\hat{H}$  - оператор Гамільтона), є оператором еволюції, тобто:  $e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} \hat{F}(t_0) e^{i\hat{H}\Delta t/\hbar} = \hat{F}(t_0 + \Delta t)$ .

1.6. Довести тотожність

$$e^{-\tau \hat{b}} \hat{a} e^{\tau \hat{b}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \left[ \hat{b}, \left[ \hat{b}, \dots \left[ \hat{b}, \hat{a} \right] \dots \right] \right] \equiv \\ \equiv \hat{a} - \tau [\hat{b}, \hat{a}] + \frac{\tau^2}{2!} [\hat{b}, [\hat{b}, \hat{a}]] - \frac{\tau^3}{3!} [\hat{b}, [\hat{b}, [\hat{b}, \hat{a}]]] + \dots,$$

де  $\hat{a}$  і  $\hat{b}$  - довільні оператори.

Вказівка: Представити вираз у лівій частині тотожності у вигляді наступного

ряду  $e^{-\tau \hat{b}} \hat{a} e^{\tau \hat{b}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n f_n(\hat{a}, \hat{b})$ , де  $f_n(\hat{a}, \hat{b})$  деяка функція від операторів

$\hat{a}$  та  $\hat{b}$ . Далі продиференціювати  $k$  разів цей вираз по  $\tau$ .

---

\*- визначає особливо складні задачі.

1.7. Довести, що для довільних некоммутуючих операторів  $[\hat{G}, \hat{F}] = i\hat{H}$  ( $\hat{H}$  – довільний оператор чи число) справджується співвідношення невизначеності, подібне до співвідношення невизначеності

$$\text{Гайзенберга: } \langle (\Delta G)^2 \rangle \langle (\Delta F)^2 \rangle \geq \frac{\langle H \rangle^2}{4}.$$

Вказівка:  $\langle \dots \rangle$  – означає квантовомеханічне середнє значення;  $\Delta \hat{G} = \hat{G} - \langle \hat{G} \rangle$ .

1.8. Знайти оператори, ермітово-спряжені до операторів а)  $\frac{\partial}{\partial x}$ ; б)  $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ .

1.9. Перевірити самоспряженість операторів а)  $i \frac{\partial}{\partial x}$ ; б)  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

1.10. Довести смоспряженість оператора моменту кількості руху  $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ .

1.11. Довести що оператор  $\hat{a} = \sqrt{1/2} \ i\hat{p} + \hat{x}$  спряжений до  $\hat{a}^\dagger = \sqrt{1/2} \ -i\hat{p} + \hat{x}$ .

## 2. Рівняння Шредінгера

Виродженою гіпергеометричною функцією називається функція, яка визначається рядом  $F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$ . Параметри  $\alpha$  довільний, а  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ .  $F(\alpha, \gamma, z)$  задовольняє рівнянню  $zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0$ . Рівнянню  $zu'' + (2 - \gamma - z)u' - (\alpha - \gamma + 1)u = 0$  задовольняє другий лінійно незалежний розв'язок  $z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ . Загальне рішення рівняння на вироджену гіпергеометричну функцію має вид:  $u = c_1 F(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ .

Гіпергеометричною функцією називається функція, яка в околі  $|z| < 1$  визначається рядом  $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$ , а при  $|z| > 1$  отримується як аналітичне продовженням цього ряду:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, 1/z) + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} z^{-\alpha} F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, 1/z)$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  є одним з часткових інтегралів диференційного рівняння, виду  $z(1-z)u'' + \gamma - (\alpha + \beta + 1)z u' - \alpha\beta u = 0$ . Параметри  $\alpha$  та  $\beta$  довільні, а  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ . Другий лінійно незалежний розв'язок цього рівняння є  $z^{1-\gamma} F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$ .

2.1. Довести, що довільне рівняння виду  $(a_0x + b_0)\varphi'' + (a_1x + b_1)\varphi' + (a_2x + b_2)\varphi = 0$  можна звести до рівняння на вироджену гіпергеометричну функцію.

2.2. Знайти точний розв'язок для частинки у потенціальній ямі виду  $U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2(\alpha x)}$ .

Відповідь:  $E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left[ -1 + 2n + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2 \hbar^2}} \right]^2$ ,

$\psi(x) = (1 - \xi^2)^{\varepsilon/2} F\left[\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, 1 - \xi^2 / 2\right], \frac{2mU_0}{\alpha^2 \hbar^2} = s(s+1), \xi = \tanh \alpha x$ .

2.3. Визначити рівні енергії та хвильові функції для частинки, яка знаходиться у потенціалі потенціалу виду  $U(x) = V_0 \exp(-2x/a) - 2\exp(-x/a)$ .

Відповідь:  $E_n = -V_0 \left[ \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{1}{2mV_0}} (n + 1/2) - 1 \right]^2$ ,  $\psi(x) = e^{-\xi/2} \xi^s F(-n, 2s + 1, \xi)$ ,

$\xi = \frac{2\sqrt{2mV_0}}{\alpha \hbar} e^{-\alpha x}, \frac{\sqrt{2mV_0}}{\alpha \hbar} - (s + 1/2) = n, \alpha = 1/a$ .

2.4. Вирішити рівняння Шредінгера для потенціалу виду  $U(x) = \alpha \delta(x)$  для випадків: а)  $\alpha > 0$ , б)  $\alpha < 0$ . У випадку (а) знайти коефіцієнт прозорості та відбивання.

Відповідь: а)  $\alpha > 0$ ,  $\psi = \begin{cases} \sqrt{k} e^{ikx} & x < 0 \\ \sqrt{k} e^{-ikx} + \sqrt{k} e^{ikx} & x > 0 \end{cases}$ , де  $k = -\frac{m\alpha}{\hbar^2}$ ,

$D = \frac{1}{1 + \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2 k}\right)^2}, R = \frac{1}{1 + \left(\frac{\hbar^2 k}{m\alpha}\right)^2};$

б)  $E = -\frac{m}{2\hbar^2} \alpha^2, \psi_{1,2} = \sqrt{2m|E|/\hbar^2} \exp \pm \sqrt{2m|E|/\hbar^2} x$ .

2.5. Знайти точне значення рівнів енергії для частинки в потенціалі  $U(x, y) = \frac{m\omega^2(x^2 + y^2)}{2} + \alpha xy$ .

Відповідь:  $E_{n_1 n_2} = \hbar \sqrt{\omega^2 - \frac{\alpha}{m}} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \sqrt{\omega^2 + \frac{\alpha}{m}} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right)$ , де

$n_1 = 0, 1, 2, \dots, n_2 = 0, 1, 2, \dots$ .

2.6. Знайти точне значення рівнів енергії для системи двох взаємодіючих частинок мас  $m$  та  $M$ , яка описується наступним оператором Гамільтона

$\hat{H} = \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{\kappa y^2}{2} + \frac{\kappa x^2}{2} + \alpha xy$ , причому  $M \neq m$ .

Відповідь:  $E_{n_x n_y} = \hbar \omega_x (n_x + 1/2) + \hbar \omega_y (n_y + 1/2)$ , де

$\operatorname{tg} \varphi_{\pm} = \frac{\kappa}{2\alpha} \sqrt{\frac{M}{m}} \left( 1 - \frac{m}{M} \right) \pm \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa}{2\alpha} \sqrt{\frac{M}{m}} \left( 1 - \frac{m}{M} \right) \right)^2}$ .

2.7. Знайти рівні енергії та хвильові функції атома водню у випадках дискретного та неперервного спектрів. Хвильові функції виразити через гіпергеометричну функцію.

Відповідь:

1) дискретний спектр:

$$R = \text{const } \rho^l \exp(-\rho/2) w(\rho), \quad \text{де} \quad w(\rho) = F(-n+l+1, 2l+2, \rho), \quad \rho = 2r/n, \\ n = 1/\sqrt{-2E}, \quad \text{де } n - \text{ціле число, } l = n-1.$$

2) неперервний спектр:

$$R_{kl} = \frac{C_{kl}}{(2l+1)!} (2kr)^l \exp(-ikr) \cdot F(i/k+l+1, 2l+2, 2ikr), \quad \text{де} \quad n = -i/\sqrt{2E} = -i/k, \\ \rho = 2ikr \quad \text{та } k - \text{неперервна величина.}$$

2.8. Вирішити попередню задачу враховуючи рух ядра. Довести, що у випадку квантової механіки задачу двох частинок можна, як і у випадку класичної механіки, звести до задачі однієї частинки у полі взаємодії.

2.9. Знайти енергію та хвильові функції просторового осцилятора. Хвильові функції виразити через гіпергеометричну функцію.

Відповідь:

$$E_n = \hbar\omega(n+3/2), \psi_{nlm} = \text{const} \cdot r^l \cdot \exp(-\alpha^2 r^2/2) \cdot Y_{lm}(\Theta, \varphi) \cdot F(-(n-l)/2, l+3/2, \alpha^2 r^2), \quad \text{де} \\ l = 0, 2, 4, \dots, n \quad (\text{для } n = 2k) \quad \text{та } l = 1, 3, \dots, n \quad (\text{для } n = 2k+1).$$

2.10. Знайти енергію та хвильові функції для частинки, яка знаходиться у потенціалі  $V(r) = -\frac{B}{r} + \frac{A}{r^2}$ .

Відповідь:

$$E_p = \frac{2B^2 m}{\hbar^2} \left[ 2p+1 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}} \right]^{-2}, \quad R(r) = \rho^s e^{-\rho/2} F(-n+s+1, 2s+2, \rho), \\ \rho = \frac{2\sqrt{-2mE}}{\hbar} r, \quad p = n-s-1, \quad \frac{2mA}{\hbar^2} + l(l+1) = s(s+1).$$

2.11. Знайти енергію та хвильові функції для частинки, яка знаходиться у потенціалі  $V(r) = Br^2 + \frac{A}{r^2}$ .

Відповідь:

$$E_n = \hbar \sqrt{\frac{B}{2m}} \left[ 4n+1/2 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}} \right], \quad R(r) = e^{-\xi/2} \xi^s F(-n, 2s+3/2, \xi), \quad \xi = \frac{\sqrt{2mB}}{\hbar} r^2, \\ \frac{2mA}{\hbar^2} + l(l+1) = 2s(2s+1).$$

2.12. Знайти коефіцієнт проходження частинки крізь потенціальний бар'єр  $U(x) = \frac{V_0}{\text{ch}^2(\alpha x)}$ .

$$\text{Відповідь: } D = \begin{pmatrix} \frac{\text{sh}^2 \frac{\pi}{\alpha} k}{\text{sh}^2 \frac{\pi}{\alpha} k + \cos^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2}}} \end{pmatrix}, \text{ при } \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2} < 1;$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\text{sh}^2 \frac{\pi}{\alpha} k}{\text{sh}^2 \frac{\pi}{\alpha} k + \text{ch}^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2} - 1}} \end{pmatrix}, \text{ при } \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2} > 1, \quad k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}.$$

2.13. Знайти коефіцієнт відбивання частинки від потенціального бар'єру  $U(x) = V_0 / (1 + e^{-\alpha x})$ .

$$\text{Відповідь: } R = \left( \frac{\text{sh} \frac{\pi}{\alpha} k_1 - k_2}{\text{sh} \frac{\pi}{\alpha} k_1 + k_2} \right), \quad k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_0)}, \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}.$$

2.14. Знайти значення енергії, які може приймати частинка, яка знаходиться у періодичному полі:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & nl \leq x \leq nl + a, \\ V_0, & nl - b \leq x \leq nl. \end{cases}$$

Періодом потенціалу є  $l = a + b$ .

Відповідь: Рівняння, яке задає можливі значення енергії частинки:  $F(E) = ch(\lambda b) \cos ka + \frac{\lambda^2 + \kappa^2}{2\lambda\kappa} \text{sh} \lambda b \sin ka = \cos kl$ . Заборонена енергія  $E = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2\mu a^2}$ .

### 3. Квазікласичне наближення.

У випадку центральної симетрії правило квантування Бора-Зоммерфельда модифікується і приймає вигляд:  $\int_{r_1}^{r_2} p_r dr = \hbar \pi (n + 1/2), \quad \int_0^\pi p_\theta d\theta = \hbar \pi (l - m + 1/2),$

$$\int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = \hbar \pi m.$$

3.1. Визначити в квазікласичному наближенні коефіцієнт прозорості бар'єра виду  $U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ W - eEx, & x \geq 0 \end{cases}$  (струм холодної емісії,  $E$  – напруженість електричного поля) та потік під бар'єром (особливо звернути увагу на те який, він - дійсний чи комплексний).

$$\text{Відповідь: } D = \exp -\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m} W - E^{3/2}}{\hbar e E}.$$

3.2. Визначити в квазікласичному наближенні коефіцієнт прозорості бар'єра виду

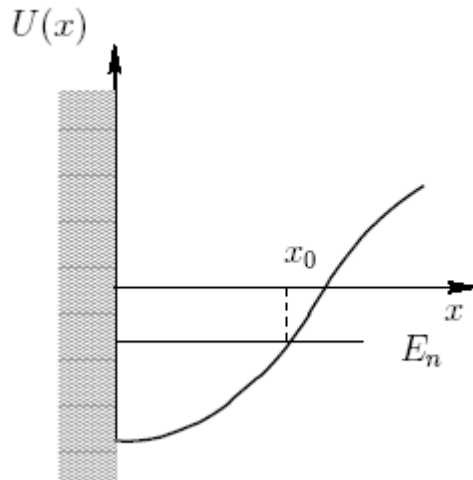
$$V(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r}, & \text{при } r \geq r_0 \\ -U_0, & \text{при } r < r_0 \end{cases}$$

Відповідь:  $D \approx \exp\left(-\frac{\pi\alpha}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}}\right).$

3.3. Знайти точне значення коефіцієнта проходження  $D$  (не вважаючи його малим) через параболічний потенційний бар'єр  $U(x) = -kx^2/2$  та порівняти його з відомим наближеним результатом.

Відповідь:  $D = \frac{1}{1 + e^{-2\pi\varepsilon}} \approx e^{-2\pi|\varepsilon|}, \quad \varepsilon \ll 0, \text{ де } \varepsilon = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}}.$

3.4. Одержати правило квантування енергетичних рівнів та знайти відповідні їм квазікласичні хвильові функції для випадку потенціалу, який зображено на мал. 1.



Мал. 1.

Відповідь:  $\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_0} dx \sqrt{2m[E_n - U(x)]} = \pi \left( n + \frac{3}{4} \right);$

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_0} |p(y)| dy\right), & 0 < x < x_0 \\ \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(y)| dy + \frac{\pi}{4}\right), & x_0 < x \end{cases}$$

3.5. Отримати квазікласичний вираз для хвильових функцій та рівнів енергії для частинки в однорідному полі тяжіння, якщо рух обмежено знизу ідеально відбиваючою площиною. Вказати границі застосування результату.

$$\text{Відповідь: } E_n = \frac{1}{2} (9\pi^2 mg^2 \hbar^2)^{1/3} \left( n + \frac{3}{4} \right)^{2/3}.$$

3.6. Отримати квазікласичний вираз рівнів енергії для потенціалу виду

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ -V_0 + \alpha x^2, & 0 < x \leq x_1 \\ -V_0 + \beta x, & x_1 < x \leq x_2 \end{cases}$$

3.7. Знайти рівні енергії дискретного спектру та відповідні хвильові функції для частинки, яка знаходиться у потенціалі  $U(x) = \begin{cases} \infty, & x < x_0 \\ \frac{\alpha}{x^2}, & x > x_0 \end{cases}, \alpha < 0$ .

$$\text{Відповідь: } E_n \approx - \frac{[\hbar \pi (n + 3/4)]^2}{2m x_0^2 \left( \sqrt{\frac{x_1^2}{x_0^2} - 1} + \frac{x_0}{x_1} - \frac{\pi}{2} \right)^2}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{E_n - V_0}}.$$

3.8\*. Отримати квазікласичний вираз для рівнів енергії частинки маси  $m$ , яка знаходиться у потенціалі  $U(x) = -V_0 / \text{ch}^2(x/a)$ .

$$\text{Відповідь: } E_n = - \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} \left[ -1 + 2n + \sqrt{\frac{8mV_0}{\alpha^2 \hbar^2}} \right]^2.$$

3.9. За допомогою квантування Бора - Зоммерфельда визначити рівні енергії та хвильові функції для частинки, яка знаходиться у потенціалі  $U(x) = V_0 [\exp(-2x/a) - 2 \exp(-x/a)]$ .

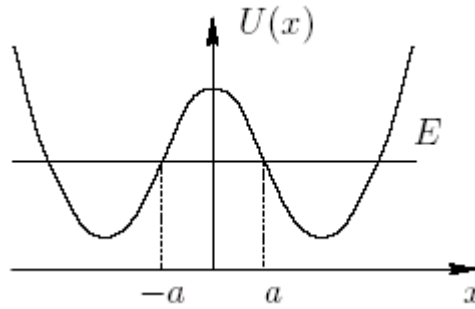
$$\text{Відповідь: } E_n = -V_0 \left[ \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{1}{2mV_0}} (n + 1/2) - 1 \right]^2.$$

3.10. У квазікласичному наближенні знайти хвильові функції та рівні енергії для частинки, яка знаходиться у кулонівському потенціалі  $V(r) = -\frac{ze^2}{r}$ .

$$\text{Відповідь: } E_n = -\frac{m z^2 e^4}{2 \hbar^2 n^2}.$$

3.11. Поле  $U(x)$  являє собою дві однакові потенційні ями, які розділені бар'єром (мал. 2). Якби бар'єр був непроникливий для частинок, то існував би один двічі вироджений рівень  $E$ , що відповідає руху частинки в окремих ямах. Можливість проникнення крізь бар'єр призводить до зняття виродження та розщепленню на два рівні,

кожен з яких відповідає рухові частинки у обох ямах. На основі квазікласичного наближення знайти розщеплення рівня.



Мал. 2.

Відповідь:  $E_2 - E_1 = \frac{2\hbar^2}{m} \psi_0(0) \psi_0'(0) = \frac{\omega \hbar}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{-a}^a |p| dx\right).$

## 4. Теорія представлень

4.1. Знайти оператор переходу від імпульсного представлення до координатного та з його допомогою отримати в імпульсному представленні оператор імпульсу і координати.

Відповідь: Перехід задається з допомогою інтегрального перетворення  $\varphi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3x \exp\left(\frac{i\vec{p}\vec{x}}{\hbar}\right) \psi(\vec{x}); \hat{\vec{p}}\varphi(\vec{p}) = \vec{p}\varphi(\vec{p}), \hat{\vec{r}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{p}}.$

4.2. Знайти вигляд операторів інверсії,  $\hat{I}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$ , та зсуву,  $\hat{T}_a\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x} + \vec{a})$ , у імпульсному представленні.

4.3. Знайти хвильову функцію  $\psi(\vec{x}) = C \exp\left[i \frac{\vec{p}_0 \vec{x}}{\hbar} - \frac{(\vec{x}_0 - \vec{x})^2}{2a^2}\right]$  у імпульсному представленні.

4.4. Знайти в імпульсному представленні оператор  $\frac{1}{r}$  і оператор  $\left[\frac{\hat{r}}{\hat{p}}\right]$  в координатному представленні.

Вказівка: використати рівняння Пуассона  $\Delta \frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{r})$  та використати інтегральне представлення для  $\delta$ -функції.

Відповідь:  $\frac{1}{r} = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{|\vec{p}'|^2} \exp \frac{i\vec{p}'\vec{x}}{\hbar} d^3p',$  його дія на хвильову функцію задається



наступним інтегральним оператором

$$\varphi'(\vec{p}) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \frac{1}{\vec{p} - \vec{p}'}^2 \varphi(\vec{p}') d\vec{p}';$$

$$\frac{1}{|\hat{\vec{p}}|} = \frac{1}{\pi\hbar} \int \frac{1}{\vec{x} - \vec{x}'}^2 \exp\left(-i \frac{\vec{p}\vec{x}'}{\hbar}\right) d^3x'.$$

4.5. Знайти потенціал Юкави  $U(\vec{x}) = \frac{e^{-\alpha r}}{r}$  в імпульсному представленні.

$$\text{Відповідь: } W(\vec{p}) = -\sqrt{\frac{2\hbar}{\pi}} \frac{1}{p^2 + (\hbar\alpha)^2}.$$

4.6. Знайти хвильову функцію в імпульсному представленні для частинки в однорідному електричному полі  $E$ . Рух одинірний.

$$\text{Відповідь: } \psi_E(p) = \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar F}} \exp\left[\frac{i}{\hbar F} \left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right)\right].$$

4.7. Розв'язати рівняння Шредінгера  $\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - Fx\right] \psi(x) = E\psi(x)$  шляхом переходу до імпульсного представлення.

$$\text{Відповідь: } \psi(\xi) = \text{const Ai}(-\xi), \text{ де } \xi = \left(x + \frac{E}{F}\right) \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}.$$

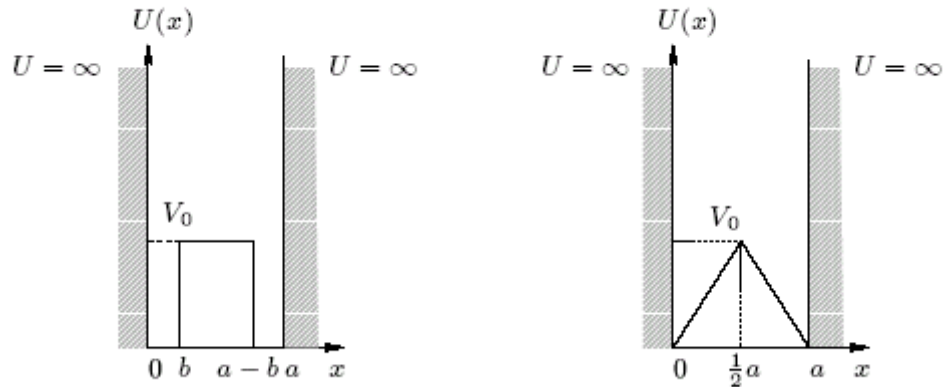
4.8. Знайти розподіл ймовірностей для імпульсу електрона у основному стані атома водню.

$$\text{Відповідь: } w(p) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\hbar}{a}\right)^5 \frac{p^2}{\hbar^2/a^2 + p^2}^4.$$

4.9. Апроксимувати потенціал  $U(x) = -V_0 / \text{ch}^2(x/a)$  параболою і знайти енергетичний спектр і хвильові функції за допомогою операторів народження і знищення.

$$\text{Відповідь: } \psi_n = e^{-z^2/2} H_n(z), \quad z = \frac{x(2mV_0)^{1/4}}{\sqrt{a\hbar}}, \quad E_n = \frac{2\hbar}{a} \sqrt{\frac{V_0}{2m}} (n + 1/2) - V_0.$$

## 5. Стаціонарна теорія збурень



Мал. 3.

5.1 Для частинки, яка знаходиться у безмежно глибокій потенціальній ямі завширшки  $a$   $0 < x < a$ , знайти у першому порядку теорії збурень зсув енергетичних рівнів під дією збурень.

а)  $V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < b \\ V_0, & b < x \leq a-b \\ 0, & a-b < x < a \end{cases}$ , мал. 3 (лівий);

б)  $V(x) = \frac{V_0}{a}(a - |2x - a|)$ , мал. 3 (правий).

в)  $V(x) = A\delta(x - a/2)$ .

Відповідь:

а)  $E_n^1 = \frac{V_0}{a} \left\{ a - 2b + \frac{a}{\pi(n+1)} \sin\left(\frac{2\pi(n+1)b}{a}\right) \right\}$ ,

б)  $E_n^1 = V_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{\pi^2(n+1)^2} \right\}$ ,

в)  $E_n^1 = -\frac{2A}{a}$ ,  $E_n^2 = -\frac{2mA^2}{\pi^2\hbar^2(n+1)^2}$ , де  $n$  - парне.

5.2 У площині обертається жорсткий ротор з моментом інерції  $I$  та електричним дипольним моментом  $\vec{d}$ . Знайти внесок однорідного електричного поля  $E = (E_x, 0)$  до енергії рівнів ротора (ефект Штарка).

Відповідь:  $\Delta E_n = E_x \frac{d^2 I}{\hbar^2} \frac{1}{4n^2 - 1}$ ,  $(V_{n,m} = \begin{cases} 0, m \neq n \pm 1 \\ -\frac{dE_x}{2}, m = n \pm 1 \end{cases})$

5.3. За допомогою теорії збурень знайти енергію частинки у полі

$U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} - eEx$  та порівняти з точним розв'язком.

Відповідь:  $E_n = \hbar\omega(n+1/2) - \frac{1}{2} \frac{e^2 E^2}{m\omega^2}$ .

5.4. За допомогою операторів народження та знищення знайти енергетичний спектр ангармонічного осцилятора  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x^4$ .

Вказівка: Довести і використати співвідношення між безрозмірною координатою та операторами народження та знищення

$$\begin{aligned} \xi^3 |n\rangle &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} (\hat{a}^3 + \hat{a}^2 \hat{a}^+ + \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^2 + \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a}^+ + \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a}^+ |n\rangle = \\ &= \frac{1}{2}^{3/2} (\sqrt{n(n-1)(n-2)} |n-3\rangle + 3n\sqrt{n} |n-1\rangle + 3(n+1)\sqrt{n+1} |n+1\rangle + \\ &\quad + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} |n+3\rangle) . \end{aligned}$$

Відповідь:  $E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{\hbar\omega} \frac{\hbar}{2m\omega} \right) - \frac{3}{4} \beta \frac{\hbar}{m\omega} \left( 2n^2 + 2n + 1 \right)$ .

5.5. За допомогою теорії збурень знайти розщеплення першого збудженого стану для двохвимірного гармонічного осцилятора, в якого  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , під дією збурення  $H_1 = \alpha xy$ . Порівняти з точним розв'язком (задача 2.5).

Відповідь:  $E_{1,\pm} = 2\hbar\omega \left( 1 \pm \frac{\alpha}{4m\omega^2} \right)$ .

## 6. Адіабатичне наближення

6.1. Гамільтоніан системи має вигляд  $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{\kappa y^2}{2} + \frac{\kappa x^2}{2} + \alpha xy$ , де  $|\alpha| < \kappa$  та  $M \gg m$ , тобто два осцилятора мають суттєво різні маси. Знайти рівні енергії та відповідні хвильові функції використовуючи адіабатичне наближення. Порівняти з точним розв'язком (задача 2.6)

Відповідь:  $E_{n_1 n_2} = \hbar\omega \left( n_1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{m}{M} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\kappa^2} \right)} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \right)$ ,  $\omega = \sqrt{\kappa/m}$ .

## 7. Квантові переходи

7.1. На частинку, яка в момент часу  $t = -\infty$  знаходиться в основному стані безмежно-глибокої ями ширини  $a$ , накладається однорідне поле, що змінюється по закону

а)  $V(x, t) = -xF_0 \exp(-t^2/\tau^2)$ ,

б)  $V(x, t) = -xF_0 \exp(-|t|/\tau)$ ,

в)  $V(x, t) = -xF_0 / [1 + t^2/\tau^2]$ .

Обчислити у першому порядку теорії збурень ймовірність збудження різних станів

частинки при  $t = \infty$ . Вказати умови застосування одержаних результатів.

$$\text{Відповідь: } W_{0n} = \begin{cases} 0, & n - \text{парне } (n \neq 0), \\ \frac{64a^5 F_0^2 (n+2)^2}{\pi^4 n^4 (n+2)^4 \hbar^2} I_k, & n - \text{непарне.} \end{cases}$$

$$\text{Тут } I_1 = \sqrt{\pi\tau} \exp(-\omega_{n0}^2 \tau^2 / 4), \quad I_2 = 2\tau(1 + \omega_{n0}^2 \tau^2)^{-1}, \quad I_3 = \pi\tau \exp(-\omega_{n0}\tau), \quad \text{де} \\ \omega_{n0} = \hbar\pi^2 n(2+n) / 2ma^2.$$

7.2. На лінійний гармонійний осцилятор діє збурення однорідного електричного поля, яке змінюється з часом по закону

$$\text{а) } E(t) = E_0 \exp[-(t/\tau)^2],$$

$$\text{б) } E(t) = E_0 \exp(-|t|/\tau).$$

Вважаючи, що до включення поля ( $t = -\infty$ ) осцилятор знаходиться у  $n$ -му стані, вирахувати у першому наближенні ймовірність його збудження за рахунок вказаного збурення ( $t = \infty$ ).

$$\text{Відповідь: } W^{n \rightarrow k} = \frac{e^2 a^2 |I|^2}{2\hbar^2} \begin{cases} n+1, & k = n+1, \\ n, & k = n-1. \end{cases} \quad \text{тут } I_1 = \sqrt{\pi\tau} E_0 \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau^2}{4}\right),$$

$$I_2 = 2\tau E_0 (1 + \omega^2 \tau^2)^{-1}.$$

7.3. Система, стаціонарний стан якої описується функціями  $\Psi_0$  і  $\Psi_1$ , знаходиться в стані  $\Psi_0$ . Ці стани відповідають енергії  $E_0 = \hbar\omega_0$  та  $E_1 = \hbar\omega_1$ . В момент часу  $t = 0$  вмикається збурення  $\hat{W}$ , яке не залежить від часу. Знайти залежність від часу хвильової функції  $\Psi(t)$ , яка описує збуджену систему.

Відповідь:

$$\Psi(t) = \alpha_0(t) \Psi_0 e^{-i\omega_0 t} + \alpha_1(t) e^{-i(\omega_0 - \omega_1)t} \Psi_1 e^{-i\omega_1 t}; \alpha_0 = A_1 e^{-i\Omega_1 t} - e^{-i\Omega_2 t} + e^{-i\Omega_2 t}; \alpha_1 = B_1 e^{-i\Omega_1 t} - e^{-i\Omega_2 t};$$

$$\hbar\Omega_{1,2} = \left(\frac{\gamma}{2}\right) + W_{00} \pm \sqrt{|W_{10}|^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}; \gamma = W_{11} - W_{00} + E_1 - E_0; A_1 = \frac{W_{00} - \hbar\Omega_2}{\hbar\Omega_1 - \Omega_2}; B_1 = \frac{W_{10}}{\hbar\Omega_1 - \Omega_2}.$$

7.4. За допомогою нестационарної теорії збурень обчислити ймовірність переходу електрону із 1s зв'язаного стані воднеподібного атома у вільний стан (елементарна теорія фотоефекту).

Відповідь:

$$W(\omega, \theta, \varphi) = 2^5 I \alpha \frac{p_0^3}{\hbar^3 m} \left(\frac{a}{Z}\right)^3 \frac{(\vec{e}_s \vec{p}_0)^2}{(1 + a^2 q^2 / Z^2)^4} \approx 2^5 I \alpha \frac{1}{\omega^2 m} \left(\frac{Z}{a}\right)^5 \frac{\hbar^5 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{p^5 (1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^4},$$

$I$  - інтенсивність електромагнітної хвилі,  $p$  - імпульс електрона що вилітає і  $p_0 = \sqrt{2m(E_0 + \hbar\omega)}$ .

7.5. Знайти ймовірність перебування системи у квантовому стані  $n$  та час

перебування у довільному квантовому стані. Матричні елементи збурення мають вигляд  $V_{nm} = F_{nm} e^{-i\omega t} + F_{nm}^* e^{i\omega t}$ , причому частота збурення  $\omega$ , близька до однієї з частот переходу ( $\omega = \omega_{nm'} - \varepsilon$ , де  $\varepsilon / \omega \ll \varepsilon / \omega_{nm} \ll 1$  - мала величина).

$$\text{Відповідь: } |c_n|^2 = \frac{|F_{nm}|^2}{2\hbar^2 \Omega^2} (1 - \cos 2\Omega t) = \frac{|F_{nm}|^2}{(\hbar^2 \varepsilon^2 / 4) + |F_{nm}|^2} \sin^2 \Omega t, \quad T = \frac{\pi}{2\Omega} \approx \frac{\hbar}{|F_{nm}|} \frac{\pi}{2}.$$

7.6. Знайти диференціальний переріз пружного розсіювання двох заряджених частинок (із зарядами  $Z_1$  і  $Z_2$ ), які взаємодіють за законом Кулона.

Вказівка: Спочатку розглянути розсіювання на кулонівському потенціалі з екрануванням  $V(\vec{x}) = Z_1 Z_2 e^2 \frac{\exp(-r/r_0)}{r}$ , а потім перейти до межі  $r_0 \rightarrow \infty$ .

$$\text{Відповідь: } d\sigma = \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\mu v^2 \sin(\theta/2)} \right)^2 d\Omega.$$

7.7. Знайти диференціальний переріз збудження воднеподібного атому з  $1s$  стану у  $2s$  стан налітаючим електроном. Процес непружного розсіювання електрона і атома розглядати як квантовий перехід системи електрон + атом із початкового стану  $\Psi_{in}$  в кінцевий стан  $\Psi_f$ .

$$\text{Відповідь: } d\sigma = 2^7 \frac{k}{k_0} \left( \frac{Z^4 a}{(q^2 a^2 + \frac{9}{4} Z^2)^3} \right)^2 d\Omega, \quad k = \sqrt{k_0^2 - \frac{2\pi}{\hbar} E_{2s} - E_{1s}} \quad \text{та } a \text{ радіус Бора.}$$

## 8. Варіаційний метод

8.1. За допомогою метода Рітца знайти хвильові функції та рівні енергії для найнижчого стану

а) гармонічного осцилятора;

б) частинки у полі  $U(x) = \alpha \delta(x)$ ,  $\alpha < 0$ . Чому цю задачу не можна вирішити в квазікласичному наближенні?

$$\text{Відповідь: а) } E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \psi_0 = \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2};$$

$$\text{б) } E = -\frac{m}{2\hbar^2} \alpha^2, \quad \psi = \begin{cases} \sqrt{k} e^{kx} & x < 0 \\ \sqrt{k} e^{-kx} & x > 0 \end{cases}, \quad \text{де } k = -\frac{m\alpha}{\hbar^2}.$$

8.2. Знайти хвильову функцію, енергію та іонізаційний потенціал основного стану атома гелію.

$$\text{Відповідь: } \Psi_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\alpha}{a} \right)^3 e^{-\frac{\alpha_0}{a} (r_1 + r_2)}, \quad \alpha_0 = Z - 5/16, \quad J = \left( Z^2 - \frac{5}{4} Z + \frac{25}{128} \right) \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

8.3. Варіаційним методом знайти хвильові функції ортогелію та паргелію.

Відповідь:  $\psi_{s,a} \alpha, \beta, x_1, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{1s} \alpha, x_1 \psi_{2s} \beta, x_2 \pm \psi_{2s} \beta, x_1 \psi_{1s} \alpha, x_2]$ ,  
 $\chi_{s,a} = \chi_{1,0}$ ,  $\Psi_{\sigma 1, \sigma 2} \alpha, \beta, x_1, x_2 = \psi_{s,a} \alpha, \beta, x_1, x_2 \chi_{\sigma 1, \sigma 2}$ .

8.4. Використовуючи хвильові функції задачі 8.3. знайти різницю енергій між рівнями ортогелію і паргелію.

Відповідь:  $\Delta E \approx 2A$ , де  $A \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z}{a} \right) \frac{5 \cdot 2^7}{3^5}$ .

8.5. Знайти діамангнітну сприйнятливість для атомів гелію.

Відповідь:  $\chi = -\frac{\mu_B n}{m} \left( \frac{ea}{\alpha_0} \right)^2 \left/ \left[ 1 + \frac{\mu_B n}{m} \left( \frac{ea}{\alpha_0} \right)^2 \right] \right.$ ,  $\alpha_0 = Z - 5/16$  та  $n$  - густина газу гелію (кількість атомів у одиниці об'єму).

8.6. Для потенціалу Юкави  $U(r) = -V_0 \{ \exp(-r/a) \} / (r/a)$  за методом Рітца для випадку s-хвилі знайти оптимальне рішення, використовуючи пробну функцію  $u = \frac{1}{r} \chi(r)$ ,  $\chi(r) = Ae^{pr}$

Відповідь:  $E = -V_0 \frac{p^3}{4} \frac{p-1}{p+1}^3$ .

## 9. Рівняння Паулі

9.1. Довести тотожності

а)  $(\hat{\sigma} \hat{a}) \hat{\sigma} = \hat{a} + i [\hat{\sigma} \times \hat{a}]$ ;  $\hat{\sigma} (\hat{\sigma} \hat{a}) = \hat{a} - i [\hat{\sigma} \times \hat{a}]$ ;  
 б)  $(\hat{\sigma} \hat{a})(\hat{\sigma} \hat{b}) = \hat{a} + i \hat{\sigma} [\hat{a} \times \hat{b}]$ .

9.2. Довести операторні співвідношення:

а)  $e^{-i\Phi j_i} j_k e^{i\Phi j_i} = (\cos \Phi) j_k + (\sin \Phi) \epsilon_{lik} j_l$ ,  $j_l$  - довільні оператори, які задовольняють переставні співвідношення  $[j_i, j_j] = i \epsilon_{ijk} j_k$ ;  
 б)  $e^{-i\Phi j_i} e^{i\Phi j_k} e^{i\Phi j_i} = e^{i\Theta \{ (\cos \Phi) j_k + (\sin \Phi) \epsilon_{ikl} j_l \}}$

9.3. Знайти рівні енергії та хвильові функції зарядженої частинки без спіну у однорідному магнітному полі.

Відповідь:  $E_{np_z} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\hbar e |B|}{mc} n + 1/2$ ;  $\Psi_{np_y p_z} = \frac{1}{\sqrt{(2\hbar\pi)}} \cdot e^{\left[ \frac{i}{\hbar} p_y y + p_z z \right]} \psi_n \frac{cp_y}{eB} - x$ , де

$$n=0, 1, 2, \dots$$

9.4. Знайти рівні енергії та хвильові функції для електрона у однорідному магнітному полі.

Відповідь:  $E_{n p_z} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\hbar e |B|}{mc} n + 1/2 + \mu_0 S_z B, S_z = \pm \frac{1}{2},$

$$\Psi_{n p_y p_z s_z} = 1/(2\hbar\pi) \cdot e^{\left[\frac{i}{\hbar} p_y y + p_z z\right]} \psi_n \frac{c p_y}{eB} - x \chi_{s_z}, \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

9.5. Розв'язати рівняння Паулі для руху спіну у змінному магнітному полі.

$$\vec{B}(t) = \vec{i}B \cos \omega t + \vec{j}B \sin \omega t + \vec{k}B_0.$$

Відповідь:

$$\hat{H}_0 = g \mu_B B_0 \hat{\sigma}_z, \hat{V}(t) = g \mu_B B \hat{\sigma}(t) = g \mu_B B \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\omega t} \\ e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}, \chi(t) = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix},$$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \frac{\omega_0 \Delta}{r} e^{i\omega t/2} \sin rt \end{pmatrix}.$$

## 10. Релятивістська квантова механіка

10.1. Знайти енергію та хвильову функцію релятивістського  $\pi^-$  - мезону (частинка без спіну) у полі ядра. Вважати  $\pi^-$  - мезон настільки збудженим, що можна знехтувати ядерними силами.

Вказівка: звести рівняння Клейна-Гордона для частинки у зовнішньому електромагнітному полі до відповідного рівняння Шредінгера.

Відповідь  $E = mc^2 \left\{ 1 + \frac{z^2 \alpha^2}{\left[ r + 1/2 + (l + 1/2)(1 - z^2 \alpha^2 / (l + 1/2))^{1/2} \right]^2} \right\}^{-1/2}.$

10.2. Знайти перетворення спінора Дірка при

- просторових поворотах,
- поворотах Лоренца,
- просторовій інверсії,
- часовій інверсії.

Відповідь:

а)  $\Psi = \hat{S} \Psi' = \hat{S}_\varphi \hat{S}_\theta \hat{S}_\psi \Psi', \hat{S}_\varphi = \cos \varphi/2 + \gamma_1 \gamma_0 \sin \varphi/2 = e^{\alpha \gamma_1 \gamma_0/2},$

б)  $\Psi = \hat{S} \Psi', \hat{S} = ch \alpha/2 + \gamma_1 \gamma_0 sh \alpha/2 = e^{\alpha \gamma_1 \gamma_0/2},$

$$\text{в) } \Psi = \hat{P}\Psi', \quad \hat{P} = \pm a\gamma_0; a = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm i \end{cases},$$

$$\text{г) } \Psi = \hat{T}\Psi', \quad \hat{T} = \pm \gamma^5 \gamma_0.$$

10.3. Чи комутують матриці повороту спінора між собою? Якщо ні, то знайти комутатори.

10.4. Чи комутує матриця загального повороту з матрицями повороту на один кут Ейлера? Знайти комутатори.

10.5. Довести тотожності

$$\text{а) } \gamma_0 \gamma_1^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ \gamma_0 \gamma_1, & n = 2k + 1 \end{cases};$$

$$\text{б) } \gamma^0 \gamma^1^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ \gamma^0 \gamma^1, & n = 2k + 1 \end{cases};$$

$$\text{в) } \gamma_1 \gamma_2^n = \begin{cases} (-1)^n, & n = 2k \\ -\gamma_1 \gamma_2, & n = 2k + 1 \end{cases};$$

$$\text{г) } [\vec{S}, \vec{\alpha} \vec{n}] = -i\hbar \vec{\alpha}, \vec{n}; [\vec{\alpha} \vec{n}, \vec{S}] = i\hbar \vec{\alpha}, \vec{n}.$$

\*10.6. Розв'язати рівняння Дірака для нуклона у полі плоскої електромагнітної хвилі  $\mathbf{u} = \frac{1}{r} \chi(r)$ .

$$\text{Відповідь: } \Psi_p = \left[ 1 + \frac{e}{2(pk)} \hat{k} \hat{A} \right] \frac{u}{\sqrt{2p_0}} e^{iS}, \text{ де } u \text{ задовольняє рівнянню } (\hat{p} - mc)u = 0$$

$$\text{та } S = -px - \int_0^{kx} \left[ \frac{e}{(kp)} (pA) - \frac{e^2}{2(kp)} A^2 \right] d\varphi.$$

\*10.7. Розв'язати рівняння Дірака для атома водню  $\left[ c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc^2 - Ze^2 / r \right] \psi = E\psi$ .

Відповідь:

$$E_{n,j} = mc^2 \left[ \left( 1 + \frac{\gamma^2}{r + \sqrt{j+1/2^2 + \gamma^2}} \right)^{-1/2} - 1 \right] \approx E_n^0 \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{n} \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) + \dots \right],$$

$$\gamma = Z\alpha, \quad \alpha \approx 1/137, \quad r = n - j - 1/2$$



