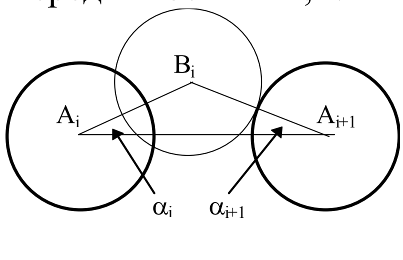
Ланцюжок куль. $N = 1995^{1995}$ однакових більярдних куль радіуса R розташовано в просторі вздовж прямої на однакових відстанях L одна від одної. Першу кулю б'ють так, що вона рухається без обертання під кутом α=1° до напрямку осі ланцюжка. Тертя відсутнє, удари між кулями пружні. Визначіть, яка доля кінетичної енергії першої кулі буде передана останній, N-ій кулі.



Ланцюжок куль. Розглянемо зіткнення i-ї кулі з (i+1)-ою (див. мал.).
A_i, A_{i+1} - початкове положення центрів куль; B_i - положення центра i-ї кулі в момент зіткнення. Позначимо $\angle B_i A_i A_{i+1} = \alpha_i$, $\angle B_i A_{i+1} A_i = \alpha_{i+1}$.

Швидкість i-ї кулі до зіткнення позначимо v_i . Вона спрямована вздовж A_iB_i . Швидкість (i+1)-ї кулі після зіткнення спрямована вздовж $B_i A_{i+1}$. Позначимо її як v_{i+1}. Добре відомо, що кулі з однаковою масою, одна з яких спочатку перебуває у стані спокою, після пружного зіткнення розлітаються у взаємно перпендикулярних напрямках. Отож неважко визначити, що $v_{i+1}=v_i \cos(\alpha_i+\alpha_{i+1})$.

Застосовуючи теорему синусів до $\Delta B_i A_i A_{i+1}$ ($B_i A_{i+1} = 2R$, $A_i A_{i+1} = L$), маємо

$$\sin(\alpha_i + \alpha_{i+1}) = \sin(\alpha_i)\frac{L}{2R} .$$

Для малих кутів ми можемо замінити синус його аргументом і, позначивши $L/2R=1+\eta$, одержати $\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \cong \eta, \quad \alpha_i = \alpha_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\ldots\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \cong \eta^i \alpha_0$.

При $L>4R$ параметр $\eta>1$ і швидкості куль все більше відхиляються від осі доти, доки наступна куля не пролетить повз сусідню і передавання енергії вздовж ланцюжка не припиниться.

При $L<4R$ кути α_i зменшуються зі збільшенням і й відбувається "фокусування" швидкостей куль вздовж осі системи. Передавання енергії вздовж ланцюжка не припиняється, і будь-яка куля з наскільки завгодно більшим номером n після зіткнення набуває швидкості

$$v_n = v_0 \prod_{i=0}^{n-1} \cos(\alpha_i + \alpha_{i+1}) = v_0 \sqrt{\prod_{i=0}^{n-1}\left[1-\left(\frac{L}{2R}\right)^2 \sin^2 \alpha_i\right]} \cong v_0 \sqrt{\prod_{i=0}^{n-1}\left[1-\left(\frac{L\alpha_0}{2R}\right)^2 \eta^{2i}\right]}$$

і кінетичної енергії, яка прямує до скінченої частки χ від енергії нульової кулі. Визначимо χ, для цього введемо позначення $\xi=(L\alpha_0/2R)^2<<1$.

$$\chi = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{v_n}{v_0}\right)^2 = \prod_{i=0}^{\infty}\left[1-\xi\eta^{2i}\right] = \left[1-\xi\right]\times\left[1-\xi\eta^2\right]\times\left[1-\xi\eta^4\right]\ldots \approx 1-\xi\left(1+\eta^2+\eta^4+\ldots\right) =$$

$$= 1-\frac{\xi}{1-\eta^2} = 1-\frac{\left(\frac{L\alpha_0}{2R}\right)^2}{1-\left(\frac{L}{2R}-1\right)^2} = 1-\frac{L\alpha_0{}^2}{4R-L}$$