МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О. В. Кравцов
А. Б. Шевченко
Д. В. Філін

МЕХАНІКА

Закони і задачі

Затверджено як навчальний посібник Методичною радою фізико-технічного інституту НТУУ «КПІ»

Вінниця О.Власюк 2006

УДК 531/534(075)
ББК 22.2я73
К 78

Рекомендовано до видання Радою фізико-технічного інституту НТУУ «КПІ» Міністерства освіти і науки України (протокол № 7 від 29 серпня 2006 р.)

Рецензенти:

В. І. Жданов, доктор фізико-математичних наук, професор;
Р. М. Кадоб'янський, кандидат фізико-математичних наук, професор

Кравцов О. В., Шевченко А. Б., Філін Д. В.

К 78 Механіка. Закони і задачі. Навчальний посібник. — Вінниця: О.Власюк, 2006. — 94 с.

ISBN 966-2932-11-9

В навчальному посібнику наведено понад 300 задач з усіх розділів курсу механіки, в тому числі, коливань та теорії відносності.

Кожній темі передують короткі теоретичні відомості.

Для студентів фізичних та інженерно-фізичних спеціальностей вузів; може використовуватися у втузах зі стандартною програмою з загальної фізики.

УДК 531/534(075)
ББК 22.2я73

ISBN 966-2932-11-9

ЗМІСТ

1. Кінематика частки

***Кінематикою** називають розділ механіки, який вивчає способи опису руху тіл, не з'ясовуючи причин, що обумовлюють цей рух.*

Якщо розміри тіла є нехтовно малими по відношенню до відстані, на яких вивчають рух тіла, то тіло називають матеріальною точкою.

Рух матеріальної точки вважається заданим, коли відомий закон за яким змінюється з часом положення точки в просторі, який в свою чергу задається у вигляді векторного рівняння: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $\left(x = x(t),\, y = y(t),\, z = z(t)\right)$, де $\vec{r}$ - радіус-вектор точки відносно початку обраної системи координат.

Переміщення і шлях. Нехай в момент часу t_1 положення матеріальної точки визначається радіус-вектором $\vec{r}_1$, а в момент часу t_2 - $\vec{r}_2$. Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ називають **переміщенням** точки.

Довжина ΔS ділянки траєкторії, по якій рухається точка, називають **шляхом точки**. Величина ΔS – є скаляром, на відміну від переміщення. Зазначимо, що $|\Delta\vec{r}\,|$ та ΔS співпадають тільки у **випадку прямолінійного без зміни напрямку руху,** і, як наслідок, для малих переміщень точки, тобто диференціалів $|\Delta\vec{r}|$ та $\Delta S : |d\vec{r}| = dS$.

Швидкість. ***Швидкістю (миттєвою) називають векторну величину $\vec{v}$, що дорівнює першій похідній за часом від радіуса-вектора $\vec{r}$ точки:***

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.1}$$

Швидкість спрямована по дотичній до траєкторії в бік руху точки і чисельно дорівнює першій похідній від довжини шляху за часом:

$$|\vec{v}| = v = \frac{dS}{dt} = S \tag{1.2}$$

В свою чергу із (1.2) випливає:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Середня швидкість. ***Вектором середньої швидкості точки $\langle\vec{v}\rangle$ в інтервалі часу від t до $t+\Delta t$ називають відношення переміщення $\Delta\vec{r}$ точки за цей інтервал часу до його величини Δt.***

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Зазначимо, що в граничному випадку $\Delta t \to 0$, вектор $\langle\vec{v}\rangle$ співпадає з вектором миттєвої швидкості точки:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{v}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}/\Delta t = \vec{v}(t).$$

Прискорення. ***Прискоренням називають векторну величину $\vec{w}$, що дорівнює першій похідній від вектора швидкості за часом***

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

або з урахуванням (1.1)

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Прискорення характеризує зміну вектора швидкості $\vec{v}$ з часом. Оскільки швидкість величина векторна, то змінюватись вона може як за напрямком так і за величиною. Зміна $\vec{v}$ за напрямком з часом характеризується **нормальним прискоренням**:

$$\vec{w}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n},$$

де $\vec{v}$ - швидкість тіла в довільній точці траєкторії, $\vec{n} = \vec{R}/R$, $\vec{R}$ - радіус-вектор кривизни траєкторії в цій же точці до центру кривизни.

Зміну $\vec{w}$ за величиною з часом характеризує **тангенціальне прискорення:**

$$\vec{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau},$$

де $\vec{\tau}$ - одиничний вектор, спрямований вздовж вектору швидкості: $\vec{\tau} = \vec{v}/v$.

Модуль повного прискорення у випадку плоского руху визначається за формулою

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{w_x^2 + w_y^2},$$

де $w_{x,y}$ - проекції вектора $\vec{w}$ на вісі обраної системи координат.

Середнім прискоренням *точки в проміжку часу від t до $t+\Delta t$ називають вектор $\langle\vec{w}\rangle$, що дорівнює відношенню приросту $\Delta\vec{v}$ швидкості за цей інтервал часу до його величини Δt*.

$$\langle\vec{w}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \tag{1.3}$$

Із (1.3) видно, що в граничному випадку $\Delta t \to 0$ вектор $\langle\vec{w}\rangle$ співпадає з миттєвим прискоренням $\vec{w}$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{w}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{v}/\Delta t = \vec{w}(t).$$

1.1. Відома залежність радіус-вектора частки від часу $\vec{r}(t)$. Записати вирази для: *а)* швидкості частки $\vec{v}$; *б)* шляху S, що проходить частка за час від t_1 до t_2; *в)* середньої швидкості частки $\langle\vec{v}\rangle$ за час від t_1 до t_2; *г)* модуля швидкості v; *д)* середнього значення модуля швидкості $\langle v\rangle$ за час від t_1 до t_2. (Відп. *а)* $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \dot{\vec{r}}$; *б)* $S = \int_{t_1}^{t_2}|\dot{\vec{r}}|dt$; *в)* $\langle\vec{v}\rangle = (\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1))/(t_2 - t_1)$; *г)* $v = |d\vec{r}/dt| = dS/dt$; *д)* $\langle v\rangle = (S(t_2) - S(t_1))/(t_2 - t_1)$).

1.2. Який знак може пов'язувати між собою величини $|d\vec{v}/dt|$ і $|dv/dt|$ ($\vec{v}$-швидкість частки) при довільному русі частки? (Відп. При криволінійному русі $|d\vec{v}/dt| \geq |dv/dt|$, при прямолінійному русі $|d\vec{v}/dt| = |dv/dt|$).

1.3. Рухаючись рівномірно зі швидкістю v_1 частка пройшла півкола радіуса R з точки *1* в точку *2*. Визначити та показати на рисунку: *а)* кінцеву швидкість частки $\vec{v}_2$; *б)* приріст радіус-вектора частки $\Delta\vec{r}$ і її переміщення $\vec{r}_{12}$; *в)* середню швидкість частки $\langle\vec{v}\rangle$; *г)* середній модуль швидкості $\langle v\rangle$; *д)* середнє прискорення частки $\langle\vec{w}\rangle$; *е)* модуль середнього прискорення $|\langle\vec{w}\rangle|$; *є)* середній модуль прискорення $\langle w\rangle$. (Відп. *а)* $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$; *б)* $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2R\,\vec{e}$, де $\vec{e}$ — одиничний вектор, спрямований від точки *1* до точки *2* (див. рис.1); *в)* $\langle\vec{v}\rangle = 2v_1\vec{e}/\pi$; *г)* $\langle v\rangle = v_1$; *д)* $\langle\vec{w}\rangle = 2v_1\vec{v}_1/\pi R$; *е)* $|\langle\vec{w}\rangle| = 2v_1^2/\pi R$; *є)* $\langle w\rangle = v_1^2/R\pi$).

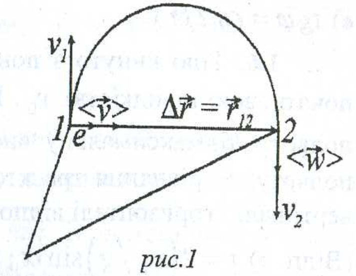


рис.1

1.4. Частка рухається по криволінійній траєкторії. Чи мають фізичний зміст наступні вирази?: а) $\int_0^t \vec{w}dt$; б) $\int_0^t wdt$; в) $\int_0^t w_n dt$; г) $\int_0^t w_\tau dt$; д) $\int_0^t w_x dt$; е) $\int_0^t \vec{v}dt$; є) $\int_0^t vdt$; ж) $\int_0^t v_x dt$, де $\vec{v}$-швидкість, $\vec{w}$-прискорення частки. (Відп. а) приріст швидкості $\Delta\vec{v}$ за час t; б),в) не мають ніякого фізичного змісту; г) приріст модуля швидкості Δv за час t; д) приріст швидкості вздовж осі OX за час t; е) переміщення частки $\Delta\vec{r}$ за час t; є) шлях S, що проходить частка за час t; ж) переміщення частки вздовж осі OX за час t).

1.5. Радіус-вектор точки A відносно початку координат змінюється з часом t за законом $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, де α та β сталі, $\vec{i}$ та $\vec{j}$ орти вздовж вісей x і y. Знайти: *а)* рівняння траєкторії точки $y(x)$; *б)* залежності від часу швидкості $\vec{v}$, прискорення $\vec{w}$ та модулів цих величин; *в)* залежність від часу кута φ між векторами $\vec{v}$ і $\vec{w}$. (Відп. *а)*

$y = x^2\beta/\alpha^2$; *б)* $\vec{v} = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j}$, $\vec{w} = 2\beta\vec{j}$, $v = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$, $w = 2\beta$; *в)* $tg\varphi = \alpha/2\beta t$).

1.6. Тіло кинуто з поверхні землі під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Нехтуючи опором повітря знайти: *а)* час польоту; *б)* максимальну висоту підйому і горизонтальну дальність польоту; *в)* рівняння траєкторії *y(x)*, де *y* та *x* переміщення тіла по вертикалі і горизонталі відповідно.
(Відп. *а)* $t = 2(v_0/g)\sin\alpha$; *б)* $h = (v_0^2/2g)\sin^2\alpha$, $l = (v_0^2/g)\sin 2\alpha$; *в)* $y = xtg\alpha - (g/2v_0^2\cos^2\alpha)x^2$).

1.7. Виразити тангенціальну $\vec{w}_\tau$ і нормальну $\vec{w}_n$ складові прискорення через швидкість $\vec{v}$ частки та її повне прискорення $\vec{w}$. (Відп. $\vec{w}_\tau = (\vec{w}\vec{v})\vec{v}/v^2$, $\vec{w}_n = \vec{w} - (\vec{w}\vec{v})\vec{v}/v^2$).

1.8. Модуль швидкості *v* частки змінюється з часом *t* за законом $v = at + b$, де *a* і *b* додатні сталі. Модуль прискорення $w = 3a$. Знайти тангенціальне та нормальне прискорення частки, а також радіус кривизни *R* траєкторії залежно від часу. (Відп. $w_\tau = a$, $w_n = (w^2 - w_\tau^2)^{1/2} = 2\sqrt{2}a$, $R = v^2/w_n = (at+b)^2/2\sqrt{2}\,a$).

1.9. Тіло кинуто під кутом до горизонту. Які із нижченаведених величин і в яких точках траєкторії співпадають між собою?: $d\vec{v}/dt$, dv/dt, $|dv/dt|$, $(dv/dt)\vec{\tau}$, $|dv/dt|\vec{\tau}$, $(v^2/R)\vec{n}$, v^2/R, $\vec{g}$, де $\vec{v}$ — швидкість тіла, $\vec{\tau}$ — одиничний вектор дотичної до траєкторії, *R* — радіус кривизни траєкторії, $\vec{n}$ — одиничний вектор нормалі до траєкторії, $\vec{g}$ — прискорення вільного падіння? (Відп. $d\vec{v}/dt = \vec{g}$ у всіх точках траєкторії; $d\vec{v}/dt = \vec{g} = (v^2/R)\vec{n}$ і $|dv/dt| = v^2/R$ на вершині траєкторії; $dv/dt = |dv/dt|$ і $(dv/dt)\vec{\tau} = |dv/dt|\vec{\tau}$ на ділянці траєкторії після верхньої точки).

1.10. Повітряна куля піднімається з поверхні Землі. Швидкість її підйому стала і дорівнює v_0. Завдяки вітру куля отримує горизонтальну компоненту швидкості $v_x = \alpha y$, де α — стала, *y* — висота підйому. Знайти залежність від висоти підйому: *а)* величини

зносу кулі *x(y)*; *б)* повного, тангенціального і нормального прискорень кулі. (Відп. *а)* $x = (\alpha/2v_0)y^2$; *б)* $w = \alpha v_0$, $w_\tau = \alpha^2 y/\sqrt{1+(\alpha y/v_0)^2}$, $w_n = \alpha v_0/\sqrt{1+(\alpha y/v_0)^2}$).

1.11. Точка рухається по площині таким чином, що її тангенціальне прискорення $w_\tau = \alpha$, нормальне прискорення $w_n = \beta t^4$, де α та β додатні сталі, *t* — час. В момент *t=0* точка не рухалась. Знайти залежність від пройденого шляху *S* радіуса кривизни *R* траєкторії точки та її повного прискорення *w*. (Відп. $R = \alpha^3/2\beta_s$, $w = \alpha\sqrt{1+(4\beta s^2/\alpha^3)^2}$).

1.12. Спостерігач рухається зі сталою швидкістю вгору вздовж похилої прямої. Тіло, кинуте під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту, перетинає траєкторію руху спостерігача двічі з інтервалом часу $\tau = 5c$, так, що обидва рази тіло знаходиться попереду спостерігача на однаковій відстані від нього. Після другого перетину спостерігач починає вимірювати довжину шляхів, що їх проходить тіло за послідовно рівні проміжки часу тривалістю τ. Знайти відношення довжин цих шляхів. Яку траєкторію буде мати тіло з точки зору спостерігача? (Відп. $\Delta S_1:\Delta S_2:\Delta S_3 \ldots = 1:2:3\ldots$. З точки зору спостерігача траєкторія тіла буде мати вигляд прямої, що утворює кут $150°$ з напрямком руху спостерігача).

1.13. Два тіла кинуто в полі тяжіння Землі в момент часу *t=0* із однієї точки. Початкова швидкість першого тіла - $\vec{v}_{10}$, другого - $\vec{v}_{20}$. Нехтуючи опором повітря, знайти: а) залежність радіус-вектора $\vec{r}_{12}$ другого тіла відносно першого залежно від часу *t*; б) закон зміни з часом відстані *l* між тілами. (Відп. а) $\vec{r}_{12} = (\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10})t$; б) $l(t) = |\vec{r}_{12}| = (v_{10}^2 + v_{20}^2 - 2v_{10}v_{20}\cos\alpha)^{1/2} t$, де α - кут між векторами $\vec{v}_{10}$ і $\vec{v}_{20}$).

1.14. Частка рухається по колу радіуса R, таким чином, що модуль її швидкості змінюється від пройденого шляху S за законом $v = aS^{1/2}$, де a — додатна стала (див.рис.2(а)). Знайти: *а*) модулі нормального, тангенціального і повного прискорень частки як функції від S; *б*) кут α між швидкістю $\vec{v}$ і повним прискоренням $\vec{w}$ як функцію S; *в*) модуль прискорення w частки як функцію кута α; *г*) привести якісні графіки отриманих функцій. (Відп. *а*) $w_n = v^2/R = a^2 S/R$, $w_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{dv}{dS}\frac{dS}{dt}\right| = \frac{a^2}{2}$;

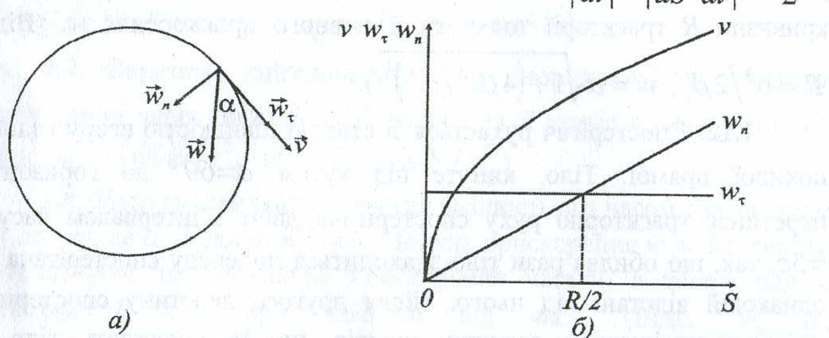


рис.2

б) $\alpha = arctg\, w_n/w_\tau = arctg\, 2S/R$; *в*) $w = a^2\left(1 + tg^2\alpha\right)^{1/2}/2$; *г*) див. рис.2(б)).

1.15. Літак летить замкнутим маршрутом ABC, де пункти A, B, C — вершини правильного трикутника. В якому випадку час, що витрачається на переліт буде меншим: якщо вітер дме в напрямку вектора $\overrightarrow{AB}$, або якщо вітер дме в напрямку вектора $\overrightarrow{BA}$? (Відп. Час, витрачений на переліт, в обох випадках однаковий).

1.16. Спортсмен кидає гранату двічі. В першому випадку без розбігу, в другому — з розбігом. Оцінити, наскільки відстань, що пролітає граната, у другому випадку більша за першу. (Відп. $\Delta l \sim v\sqrt{2l/g} \approx 30$ м, при l (дальність польоту без розбігу) ~ 50 м, v (додаткова горизонтальна швидкість, що надається розбігом) ~ 10 м/с).

1.17. Оцінити час витікання води із наповненої ванни. (Відп. $t \sim SH/S_0\sqrt{2gH} \approx 3$ хв, при: S (площа ванни) ~ 1м^2, S_0 (площа отвору в ванні) ~ 10^{-3} м^2, H (висота рівня води) ~ 0.5 м).

2. КІНЕМАТИКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

Рух точки по колу (траєкторії зі сталим радіусом кривизни) вивчає кінематика обертального руху. Основними характеристиками обертального руху є: кут ***повороту*** φ (вимірюється в радіанах), ***кутова швидкість*** $\vec{\omega}$, ***кутове прискорення*** $\vec{\beta}$, ***період обертання*** T.

Кутовою швидкістю (миттєвою) ***називають вектор, що дорівнює першій похідній від кута повороту за часом***

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{2.1}$$

Напрямок вектора $\vec{\omega}$ визначається за правилом свердлика, тобто співпадає з напрямком поступального руху свердлика, кінцівка котрого рухається по колу в тому ж напрямку, що і тіло.

Якщо тіло бере участь одночасно у декількох обертальних рухах, то результуюча кутова швидкість визначається за правилом векторного (геометричного) додавання :

$$\vec{\omega}_p = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

Модуль ω_p визначається через ω_1 і ω_2 та кут α між векторами $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ за формулою:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\alpha}.$$

Кутовим прискоренням (миттєвим) ***називають вектор, що дорівнює першій похідній від вектора кутової швидкості за часом***

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{2.2}$$

Кутове прискорення характеризує зміну з часом вектора кутової швидкості точки. Вектор $\vec{\beta}$ співпадає за напрямком $\vec{\omega}$ у випадку прискореного обертання $\left(\left|\vec{\beta}\right| = \beta = \dfrac{d\omega}{dt} > 0\right)$, та є протилежним $\vec{\omega}$ у випадку сповільненого обертання $\left(\left|\vec{\beta}\right| = \beta = \dfrac{d\omega}{dt} < 0\right)$.

Із формул (2.1) та (2.2) також маємо:

$$\vec{\beta} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

Лінійна швидкість $\vec{v}$ та кутова швидкість обертання $\vec{\omega}$ пов'язані таким чином:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right] = \omega R\vec{\tau}\,, \qquad (2.3)$$

де $\vec{R}$ - радіус вектор, що з'єднує центр кола, по якому обертається тіло, з самим тілом

Диференціюючи за часом вираз (2.3) знаходимо:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n\,, \qquad (2.4)$$

де $\vec{w}_\tau = \left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right] = \beta R\vec{\tau}$ - **тангенціальне**, а $\vec{w}_n = \left[\vec{\omega}\times\vec{v}\right] = \omega^2 R\vec{n}$ - **нормальне прискорення** тіла.

Зауважимо, що формули (2.3), (2.4) отримані для випадку, коли вісь, навколо котрої обертається тіло, є нерухомою. У випадку, коли вісь сама здійснює обертальний рух з вектором кутової швидкості $\vec{\Omega}$, вирази для лінійної швидкості та прискорення (відносно нерухомої системи координат) мають вигляд:

$$\vec{v} = \left[\left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}\right)\times\vec{R}\right],$$

$$\vec{w} = \left[\left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}\right)\times\vec{R}\right] + \left[\left(\vec{\Omega} + \vec{\omega}\right)\times\vec{v}\right].$$

Періодом обертання *T* – *називають час, за який точка повертається навколо нерухомої осі обертання на кут* $\varphi = 2\pi$

$$\int_0^T \omega dt = 2\pi\,.$$

Кількість обертів n, що здійснює тіло за одиницю часу, називають **частотою обертання.**

$$n = 1/T\,.$$

Зазначимо, що аналогічно до гл.1, можна ввести поняття середньої кутової швидкості і середнього кутового прискорення: як приріст відповідних величин за проміжок часу Δt.

$$\left\langle\vec{\omega}\right\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\,,\ \left\langle\vec{\beta}\right\rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}\,. \qquad (2.5)$$

Неважко бачити, що в граничному випадку $\Delta t \to 0$ вирази (2.5) перетворюються у відповідні вирази (2.1) і (2.2).

2.1. Диск обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, що перпендикулярна площині диска та проходить через його центр (див. рис.3). Положення точки A диска відносно його центру задається вектором $\vec{r}$, її швидкість дорівнює $\vec{v}$. Виразити $\vec{\omega}$ через $\vec{r}$ і $\vec{v}$. Чи можна користуватись отриманою формулою, якщо замінити в неї вектор $\vec{r}$ на вектор $\vec{r}\,'$, котрий починається в довільній точці O' на осі обертання? (Відп. В даному випадку $\omega = v/r$, одиничний вектор напрямку $\vec{e}_\omega$ можна "сконструювати" із векторів $\vec{r}$ і $\vec{v}$: $\vec{e}_\omega = \left[\vec{r}\vec{v}\right]/(rv)$. Таким чином, $\vec{\omega} = \left[\vec{r}\vec{v}\right]/r^2$. Заміна $\vec{r}$ на $\vec{r}\,'$ неможлива, хоча б тому, що $\left[\vec{r}\,'\vec{v}\right]$ за напрямком не співпадає з $\vec{\omega}$).

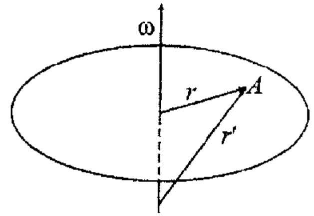


рис.3

2.2. Постійний за модулем вектор $\vec{a}$ обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої вісі, котра перпендикулярна вектору $\vec{a}$. Знайти $\ddot{\vec{a}}$. (Відп. $\ddot{\vec{a}} = d\left[\vec{\omega}\vec{a}\right]/dt = \left[\vec{\omega}\dot{\vec{a}}\right] = -\omega^2\vec{a}$).

2.3. У скільки разів кутова швидкість хвилинної стрілки годинника більша за кутову швидкість годинної стрілки? (Відп. У 12 разів).

2.4. Тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що залежність кута його повороту від часу t описується за законом $\varphi = at^2$, де a-додатня стала. Знайти середні значення його кутової швидкості $\langle\omega\rangle$ і кутового прискорення $\langle\beta\rangle$ за проміжок часу від 0 до τ. (Відп. $\langle\omega\rangle = a\tau$, $\langle\beta\rangle = 2a$).

2.5. Тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що залежність кута його повороту від часу t описується за законом $\varphi = at^{1/2}$, де a - стала. Знайти середні значення кутової швидкості $\langle\omega\rangle$ і кутового прискорення $\langle\beta\rangle$ за проміжок часу від τ_1 до τ_2. (Відп. $\langle\omega\rangle = a\dfrac{\left(\sqrt{\tau_2} - \sqrt{\tau_1}\right)}{\tau_2 - \tau_1}$, $\langle\beta\rangle = \dfrac{a}{2}\dfrac{\left(1/\sqrt{\tau_2} - 1/\sqrt{\tau_1}\right)}{\tau_2 - \tau_1}$).

2.6. Тіло обертається навколо нерухомої осі таким чином, що кут його повороту змінюється в залежності від часу t за законом $\varphi = 2\pi\left(at - bt^2/2\right)$, де a і b додатні сталі. Знайти момент часу τ, коли тіло зупиниться, а також кількість обертів N тіла до зупинки. (Відп. $\tau = a/b$, $N = \varphi(\tau)/2\pi = a^2/2b$).

2.7. Тверде тіло починає обертатись навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = \alpha t$, де $\alpha = 2\cdot 10^{-2}$ рад/с^3. Через який час після початку обертання вектор повного прискорення довільної точки тіла буде складати кут $\varphi = 60°$ з її вектором швидкості? (Відп. $t = \sqrt[3]{(4/\alpha)tg\varphi} = 7$ c).

2.8. Колесо радіуса R рівномірно котиться без проковзування горизонтальним шляхом зі швидкістю v (див. рис.4). Довести, що лінійна швидкість обертання відносно центру колеса довільної точки, яка знаходиться на його ободі, дорівнює швидкості центру колеса відносно нерухомої системи координат, тобто v. Знайти координати x і y довільної точки A на ободі колеса, виразивши їх як функції часу t або кута повороту колеса φ, вважаючи, що при $t = 0$ $\varphi = 0$, $x = 0$, $y = 0$. (Відп. $x = R(\varphi - \sin\varphi)$, $y = R(1 - \cos\varphi)$, де $\varphi = \omega t$, $\omega = v/R$).

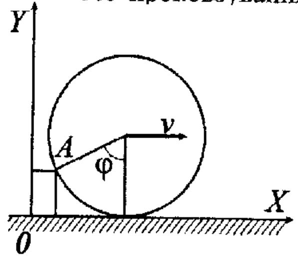


рис.4

2.9. Використовуючи результати попередньої задачі знайти довжину повного шляху кожної точки ободу колеса між двома її послідовними дотиками до поверхні, по якій рухається колесо. (Відп. $S = 8R$).

2.10. Циліндр котиться без проковзування по горизонтальній площині. Радіус циліндра — r. Знайти радіуси кривизни траєкторій точок A і B (див. рис.5). (Відп. $R_a = 4r, R_b = 2\sqrt{2}r$).

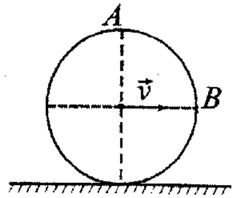


рис.5

2.11. На нерухомий вертикальний циліндр з радіусом R намотана нитка так, що в початковий момент часу залишається ненамотаним лише кінець нитки довжиною l_0 (див. рис.6). За кінець нитки прив'язано жука, який починає рухатися у горизонтальній площині зі швидкістю v_0, спрямованою перпендикулярно до нитки так, що нитка починає розмотуватися. Як змінюватиметься з часом довжина розмотаної частини нитки? (Відп. $l = \sqrt{l_0^2 + 2Rv_0t}$).

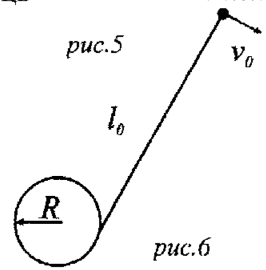


рис.6

2.12. У відкритому морі на екваторі знаходиться висока вертикальна скеля. Як буде рухатись по цій скелі тінь, котра відкидається сферичною поверхнею Землі при сході Сонця? Знайти прискорення такого руху. Радіус Землі $R = 6400$ км. За який час тінь зміститься від основи до вершини скелі, якщо висота останньої $h = 1$ км? (Відп. Тінь буде рухатись вгору з постійним прискоренням $w = 4\pi^2 R/T_{сут}^2 = 3.4\,\text{см/с}^2$, $t = \sqrt{2h/w} = 4$ хв).

2.13. Тверде тіло одночасно рухається з кутовими швидкостями ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ навколо трьох взаємно перпендикулярних миттєвих вісей, що проходять через одну точку. Знайти, як стосовно до вищевказаних вісей повинна бути орієнтована одна вісь, обертання біля котрої могло б замінити відразу усі три вказані незалежні обертання. З якою кутовою швидкістю в такому випадку повинно обертатись тіло навколо знайденої нової вісі обертання? (Відп. Косинуси кутів між новою віссю обертання і трьома попередніми вісями визначаються виразами $\cos\alpha = 1/\sqrt{14}$, $\cos\beta = 2/\sqrt{14}$, $\cos\gamma = 3/\sqrt{14}$. Кутова швидкість обертання навколо нової осі буде $\omega = \sqrt{14}\omega_1$).

2.14. Тверде тіло обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega_0 = 0.5$ рад/с навколо горизонтальної осі AB. В момент $t = 0$ вісь AB

починає обертатись навколо вертикалі зі сталим кутовим прискоренням $\beta_0 = 0.1$ рад/с^2. Знайти модулі кутової швидкості і кутового прискорення тіла через $t = 3.5$ с. (Відп. $\omega = \omega_0\sqrt{1+\left(\beta_0 t/\omega_0\right)^2} = 0.6$ рад/с, $\beta = \beta_0\sqrt{1+\omega_0^2 t^2} = 0.2$ рад/с^2).

2.15. На кіноекрані демонструється візок, що рухається. Радіус передніх коліс візка $r = 0.35$ м, задніх $R = 1.5r$. Передні колеса мають $N_1 = 6$ спиць. Знімальна кінокамера переміщує плівку зі швидкістю 24 кадри за секунду. Вважаючи, що колеса візка котяться без ковзання, визначити, з якою мінімальною швидкістю має рухатись візок, щоб його передні колеса здавалися на екрані нерухомими? Яку найменшу кількість спиць повинні мати задні колеса, щоб вони також здавались нерухомими? (Відп. $v_{\min} = 2\pi r/N_1\tau = 8.8$ м/с, $\tau = 1/24$ с, $N_2 = N_1 R/r = 9$).

2.16. Оцінити кількість обертів, котрі здійснює автомобіль, що вільно впав у кілометрову прірву пересуваючись перед цим на повній швидкості. (Відп. $n \sim \sqrt{2gH}/\pi v \approx 1.5$, при горизонтальній швидкості $v = 30$ м/с).

3. ДИНАМІКА ЧАСТКИ

Динамікою ***називають розділ механіки, який вивчає причини і закони руху тіл***. Одним із найважливіших понять динаміки є сила.

Сила $\vec{F}$ – це векторна величина, що є мірою взаємодії між тілами або між тілом та силовим полем, в результаті чого відбувається зміна положення тіл або їх стану. Сила повністю визначена, якщо відомі її модуль, напрям і точка прикладання.

Основи динаміки складають три закони Ньютона, які є наслідком узагальнення спостережень та дослідів в межах механічних явищ.

Перший закон Ньютона. ***Існують системи відліку, в яких достатньо віддалене від інших тіл тіло зберігає стан спокою або рівномірного руху***. Такі системи відліку називають **інерціальними системами відліку (ІСВ)**. Для ІСВ має місце **принцип відносності Галілея.** ***Ніякими механічними дослідами, поставленими всередині ІСВ, неможливо встановити, перебуває ця система в стані спокою, чи вона рухається рівномірно і прямолінійно***.

Із принципу відносності Галілея випливає, що існує безліч рівноправних ІСВ, крім того, будь-які механічні процеси відбуваються однаково у всіх ІСВ. При переході від однієї ІСВ до іншої можуть змінюватись швидкість тіла, його переміщення, траєкторія, але не рівняння руху, тобто закони Ньютона.

Іншим важливим поняттям динаміки є **маса** тіла. ***Масою*** m ***називають скалярну величину, яка кількісно характеризує міру інертності тіла***. Це означає, що тіло з більшою масою під час взаємодії з іншим тілом змінює свою швидкість на меншу величину, і навпаки.

Маса характеризує ще одну властивість тіл - їх здатність взаємодіяти з іншими тілами за законом всесвітнього тяжіння. У цих випадках маса виступає як міра гравітації, або міра тяжіння, і її називають **гравітаційною масою** $m_{гр}$. У сучасній фізиці експериментально визначено, $m_{гр} = m_{інер}$ (інертна маса тіла) з точністю до $10^{-12,5}$, тому їх не розрізняють і говорять просто про масу тіла.

Другий закон Ньютона. ***Прискорення*** $\vec{w}$, ***яке надає тілу сила*** $\vec{F}$, ***спрямоване в напрямку діючої сили, прямо пропорційне величині цієї сили і обернено пропорційне масі тіла*** m, ***тобто***

$$\vec{w} = \vec{F}/m .$$

Якщо ввести поняття кількості руху тіла (імпульсу) за формулою $m\vec{v} = \vec{P}$, то другий закон Ньютона більш узагальнено має вигляд:

$$d\vec{P}/dt = \vec{F} .$$

Сила, що діє на тіла, дорівнює похідній за часом від імпульсу тіла.

Коли на тіло одночасно діє кілька сил, то другий закон Ньютона має таку форму запису:

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i , \tag{3.1}$$

де $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - **рівнодійна сила**, що дорівнює векторній сумі сил, прикладених до тіла.

починає обертатись навколо вертикалі зі сталим кутовим прискоренням $\beta_0 = 0.1$ рад/с^2. Знайти модулі кутової швидкості і кутового прискорення тіла через $t = 3.5$ с. (Відп. $\omega = \omega_0\sqrt{1+\left(\beta_0 t/\omega_0\right)^2} = 0.6$ рад/с, $\beta = \beta_0\sqrt{1+\omega_0^2 t^2} = 0.2$ рад/с^2).

2.15. На кіноекрані демонструється візок, що рухається. Радіус передніх коліс візка $r = 0.35$ м, задніх $R = 1.5r$. Передні колеса мають $N_1 = 6$ спиць. Знімальна кінокамера переміщує плівку зі швидкістю *24* кадри за секунду. Вважаючи, що колеса візка котяться без ковзання, визначити, з якою мінімальною швидкістю має рухатись візок, щоб його передні колеса здавалися на екрані нерухомими? Яку найменшу кількість спиць повинні мати задні колеса, щоб вони також здавались нерухомими? (Відп. $v_{\min} = 2\pi r/N_1\tau = 8.8$ м/с, $\tau = 1/24$ с, $N_2 = N_1 R/r = 9$).

2.16. Оцінити кількість обертів, котрі здійснює автомобіль, що вільно впав у кілометрову прірву пересуваючись перед цим на повній швидкості. (Відп. $n \sim \sqrt{2gH}/\pi v \approx 1.5$, при горизонтальній швидкості $v = 30$ м/с).

3. ДИНАМІКА ЧАСТКИ

Динамікою ***називають розділ механіки, який вивчає причини і закони руху тіл.*** Одним із найважливіших понять динаміки є сила.

Сила $\vec{F}$ – це векторна величина, що є мірою взаємодії між тілами або між тілом та силовим полем, в результаті чого відбувається зміна положення тіл або їх стану. Сила повністю визначена, якщо відомі її модуль, напрям і точка прикладання.

Основи динаміки складають три закони Ньютона, які є наслідком узагальнення спостережень та дослідів в межах механічних явищ.

Перший закон Ньютона. ***Існують системи відліку, в яких достатньо віддалене від інших тіл тіло зберігає стан спокою або рівномірного руху***. Такі системи відліку називають **інерціальними системами відліку (ІСВ)**. Для ІСВ має місце **принцип відносності Галілея.** ***Ніякими механічними дослідами, поставленими всередині ІСВ, неможливо встановити, перебуває ця система в стані спокою, чи вона рухається рівномірно і прямолінійно.***

Із принципу відносності Галілея випливає, що існує безліч рівноправних ІСВ, крім того, будь-які механічні процеси відбуваються однаково у всіх ІСВ. При переході від однієї ІСВ до іншої можуть змінюватись швидкість тіла, його переміщення, траєкторія, але не рівняння руху, тобто закони Ньютона.

Іншим важливим поняттям динаміки є **маса** тіла. ***Масою*** m ***називають скалярну величину, яка кількісно характеризує міру інертності тіла.*** Це означає, що тіло з більшою масою під час взаємодії з іншим тілом змінює свою швидкість на меншу величину, і навпаки.

Маса характеризує ще одну властивість тіл - їх здатність взаємодіяти з іншими тілами за законом всесвітнього тяжіння. У цих випадках маса виступає як міра гравітації, або міра тяжіння, і її називають **гравітаційною масою** $m_{гр}$. У сучасній фізиці експериментально визначено, $m_{гр} = m_{інер}$ (інертна маса тіла) з точністю до $10^{-12,5}$, тому їх не розрізняють і говорять просто про масу тіла.

Другий закон Ньютона. ***Прискорення*** $\vec{w}$***, яке надає тілу сила*** $\vec{F}$***, спрямоване в напрямку діючої сили, прямо пропорційне величині цієї сили і обернено пропорційне масі тіла*** m***, тобто***

$$\vec{w} = \vec{F}/m.$$

Якщо ввести поняття кількості руху тіла (імпульсу) за формулою $m\vec{v} = \vec{P}$, то другий закон Ньютона більш узагальнено має вигляд:

$$d\vec{P}/dt = \vec{F}.$$

Сила, що діє на тіла, дорівнює похідній за часом від імпульсу тіла.

Коли на тіло одночасно діє кілька сил, то другий закон Ньютона має таку форму запису:

$$m\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \tag{3.1}$$

де $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - **рівнодійна сила**, що дорівнює векторній сумі сил, прикладених до тіла.

Рівняння (3.1) називають **основним рівнянням динаміки.**

Третій закон Ньютона . ***Тіла діють одне на одне з силами, напрямленими вздовж однієї прямої, рівними за модулем і протилежними за напрямком.***

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 . \tag{3.2}$$

Знак мінус – у (3.2) означає, що сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ протилежні за напрямком.

Зазначимо, що рівність сил за величиною під час взаємодії має місце завжди і не залежить від того, рухаються взаємодіючи тіла чи перебувають у відносному спокої.

3.1. Частка рухається вздовж осі x за законом $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, де α та β додатні сталі. В момент $t = 0$ сила, що діє на частку, дорівнює F_0. Знайти значення F_x сили в точках повороту і в момент, коли частка знов опиниться в точці $x = 0$. (Відп. $-F_0, -2F_0$).

3.2. Залежність радіус-вектора $\vec{r}$ частки від часу t задається законом $\vec{r} = a(\vec{e}_x \cos\omega t + \vec{e}_y \sin\omega t)$, де a, ω — додатні сталі. Знаючи масу частки m, знайти силу $\vec{F}$, що діє на частку та описати характер її руху. (Відп. $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$, рівномірний рух по колу радіуса a з кутовою швидкістю ω).

3.3. Описати можливий характер руху частки масою m (форму траєкторії) за умов: *а)* сила $\vec{F} = const$; *б)* $F = const$ і модуль швидкості $v = const$; *в)* $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$, де k — додатня стала, $v_y = v_z = 0$; *г)* $\vec{F} = -\alpha\vec{r}/r^3$, $v = const$, α — додатня стала, $\vec{r}$ — радіус-вектор частки; *д)* $\vec{F} = F_0\vec{e}_x \cos\omega t$, $v_y = v_z = 0$, F_0 і ω — додатні сталі, t — час. Для випадків *а)* і *д)* спробувати знайти залежність швидкості $\vec{v}$ і радіус-вектора $\vec{r}$ від часу для довільних початкових умов. (Відп. *а)* в загальному випадку параболічна траєкторія, наприклад, рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, $\vec{v} = \vec{v}_0 + t\vec{F}/m$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + t^2\vec{F}/2m$, де $\vec{v}_0$ і $\vec{r}_0$ — початкові

швидкість і радіус-вектор; *б)* рух по колу радіуса $R = mv^2/F$; *в)* гармонічні коливання *г)* рух по колу радіуса $R = \alpha/mv^2$ (напр. рух супутника навколо планети); *д)* $x = x_0 + v_0 t + F_0(1 - \cos\omega t)/m\omega^2$, x_0, v_0 — початкові координата та швидкість).

3.4. Іон влітає в однорідне магнітне поле з індукцією B: *а)* доведіть, що час, протягом якого іон з зарядом "e" здійснює N обертів, може бути знайдено із наближеного співвідношення $t \approx 650\, NM/B$, де t береться в мікросекундах, M — в атомних одиницях маси, B — в гаусах; *б)* доведіть, що радіус кола наближено може бути знайдений із співвідношення $R \approx 145\sqrt{EM}/B$ [см], де E — енергія іона в електрон-вольтах.

3.5. Тіло поклали на похилу площину і надали спрямовану догори початкову швидкість v_0. Коефіцієнт тертя між тілом та площиною дорівнює k. При якому значенні кута нахилу площини α тіло пройде вгору найменшу відстань? Чому вона дорівнює? (Відп. $l_{min} = v_0^2/2g\sqrt{1+k^2}$, при $tg\alpha = 1/k$).

3.6. На похилій площині, що утворює кут α з горизонтом розміщено два бруски *1* і *2* (див. рис.7). Маси брусків m_1 та m_2, коефіцієнти тертя між площиною і брусками k_1 та k_2 відповідно ($k_1 > k_2$). Знайти: *а)* силу взаємодії між брусками при їх русі; *б)* значення кута α, при якому не буде ковзання.

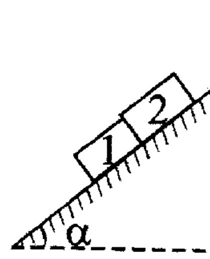


рис.7

(Відп. *а)* $F = (k_1 - k_2)m_1 m_2 g\cos\alpha/(m_1 + m_2)$; *б)* $tg\alpha < (k_1 m_1 + k_2 m_2)/(m_1 + m_2)$).

3.7. Невелике тіло починає ковзати похилою площиною, яка утворює кут α з горизонтом. Коефіцієнт тертя k змінюється залежно від пройденого шляху x за законом $k = \gamma x$, де γ — стала. Знайти відстань, що її пройшло тіло до зупинки, та максимальну швидкість на цьому шляху. (Відп. $S = (2/\gamma)tg\alpha$, $v_{max} = \sqrt{(g/\gamma)\sin\alpha tg\alpha}$).

3.8. Куля, що пробиває дошку товщиною h, змінює свою швидкість від v_0 до v. Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору з боку дошки пропорційною квадрату швидкості. (Відп. $t = h(v_0 - v)/v_0 v \ln(v_0/v)$).

3.9. До бруска масою m, що знаходиться на гладенькій горизонтальній поверхні, приклали сталу за модулем силу $F=mg/3$. В процесі його прямолінійного руху кут α між напрямком цієї сили і горизонтом змінюють за законом $\alpha=aS$, де a-стала, S-пройдений бруском шлях (із початкового положення). Знайти швидкість бруска як функцію кута α. (Відп. $v = \sqrt{(2g/3a)\sin\alpha}$).

3.10. Автомобіль рухається зі сталим тангенціальним прискоренням $w_\tau = 0.62$ м/с^2 по горизонтальній площині, описуючи коло радіуса $R = 40$ м. Коефіцієнт тертя ковзання між колесами автомобіля і поверхнею $k = 0.2$. Який шлях пройде автомобіль без ковзання, якщо в початковий момент його швидкість дорівнює нулю? (Відп. $S = (R/2)\sqrt{(kg/w_\tau)^2 - 1} = 60$ м).

3.11. Невелику кульку масою m, підвішену на нитці, відводять у бік, так що нитка утворює прямий кут з вертикаллю. Потім кульку відпускають. Знайти: *а)* модуль повного прискорення кульки і силу натягу нитки залежно від θ — кута відхилення нитки від вертикалі; *б)* силу натягу нитки в момент, коли вертикальна складова швидкості кульки максимальна; *в)* кут θ між ниткою і вертикаллю в момент, коли вектор повного прискорення кульки спрямований горизонтально. (Відп. *а)* $w = g\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}$, $T = 3mg\cos\vartheta$; *б)* $T = mg\sqrt{3}$; *в)* $\cos\vartheta = 1/\sqrt{3}$).

3.12. Кулька, підвішена на нитці, гойдається в вертикальній площині, так, що її прискорення в крайньому та нижньому положеннях рівні за модулем один одному. Знайти кут α, на який відхиляється нитка в крайньому положенні. (Відп. $\alpha=53°$).

3.13. Кулька впала з якоїсь висоти, пружно відбилася від підлоги зі швидкістю u, та полетіла вертикально вгору. Сила опору повітря пропорційна швидкості кульки. Через час t після падіння,

кулька ще раз упала на підлогу. Яку швидкість вона мала після другого удару? (Відп. $v = gt - u$).

3.14. Визначити силу, що діє на вертикальну стінку, з боку гантелі, що падає, в той час, коли вона утворює кут α з горизонтом (див. рис.8). Гантель починає рух із вертикального стану без початкової швидкості. При якому куті гантель повністю відірветься від стінки? Маса кожної кульки гантелі дорівнює m. (Відп. $F = mg(3\sin\alpha - 2)\cos\alpha$).

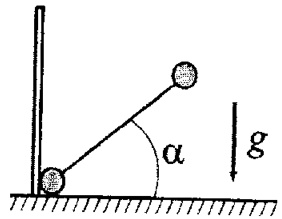


рис.8

3.15. Нитку, на кінці якої закріплено кульку масою $M=10$ г, починають обертати у вертикальній площині. Якою має бути сила натягу нитки F, для того, щоб обертання було можливим? (Відп. $F/Mg \geq 6$).

3.16. Через нерухомий блок перекинуто нитку, на кінцях якої закріплено два тягарі з масою m_1 і m_2 ($m_1 > m_2$). Виходячи із означення центра мас системи (ЦМС) як точки, з масою всієї системи, що рухається під дією сили, рівній сумі всіх зовнішніх сил, що діють на систему, знайдіть прискорення ЦМС тягарів m_1 і m_2. (Відп. $w = (m_1 - m_2)^2 g/(m_1 + m_2)^2$).

3.17. Через блок, що закріплено в стелі, перекинуто мотузок, на якому вантаж масою M врівноважено драбиною з мавпою. Маса мавпи m. За яким законом має рухатись відносно драбини мавпа, для того, щоб реакція блока на стелю дорівнювала нулю? Масами блока і мотузка знехтувати. Мотузок не розтягується. (Відп. Відносно драбини мавпа має рухатись з прискоренням $\vec{w} = 2M\vec{g}/m$).

3.18. Частка масою m рухається по внутрішній гладенькій поверхні вертикального циліндру радіуса R. Знайти силу тиску частки на стінку циліндра, якщо в початковий момент її швидкість дорівнює v_0 і складає кут α з горизонтом. (Відп. $F = (mv_0^2/R)\cos^2\alpha$).

3.19. На внутрішній поверхні, горизонтально до розташованого циліндра, котрий обертається навколо своєї осі, знаходяться малі частки. Коефіцієнт тертя між поверхнею циліндру і частками дорівнює *1*, внутрішній радіус циліндра *R*. З якою кутовою швидкістю має обертатись циліндр, для того, щоб частки не зісковзували з його поверхні? (Відп. $\omega > \sqrt{g\sqrt{2}/R}$).

3.20. На частку масою m, що перебуває в стані спокою, в момент часу $t=0$ починає діяти сила, яка змінюється з часом за законом $\vec{F} = \vec{a}t(t-\tau)$, де $\vec{a}$ - сталий вектор, τ - час, протягом якого діє ця сила. Знайти: а) імпульс частки після припинення дії сили; б) шлях, який проходить частка за час дії сили. (Відп. а) $\vec{p} = -\vec{a}\tau^3/6$; б) $S = a\tau^4/12m$).

3.21. Частка масою m в момент часу $t=0$ починає рухатись під дією сили $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos\omega t$, де F_0 і ω - сталі. Скільки часу частка буде рухатись до першої зупинки? Який відрізок шляху вона пройде за цей час? Чому дорівнює максимальна швидкість частки на цьому шляху? (Відп. $t=\pi/\omega$, $S = 2F_0/m\omega^2$, $v_{max} = F_0/m\omega$).

3.22. На невеличке тіло масою m, що знаходиться на гладенькій горизонтальній поверхні, в момент часу $t=0$ починає діяти сила, що змінюється з часом за законом $F=at$, де a-стала. Напрямок цієї сили утворює кут α з горизонтом. В початковий момент часу тіло було нерухомим, кут α гострий. Визначити: а) швидкість тіла в момент відриву від площини; б) шлях, що його пройшло тіло до цього моменту. (Відп. а) $v = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2a\sin^2\alpha}$; б) $S = \dfrac{m^2g^3\cos\alpha}{6a^2\sin^3\alpha}$).

3.23. На горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя k лежить тіло масою m. В момент часу $t=0$ йому надали горизонтальну силу, яка змінюється з часом за законом $\vec{F} = \vec{a}t$, де $\vec{a}$ - сталий вектор. Знайти шлях, що його пройшло тіло за перші t секунд на початку дії цієї сили. (Відп. $S = a(t-t_0)^3/6m$, де $t_0 = kmg/a$ - момент часу, з якого почався рух).

3.24. Тіло масою m кинули вертикально вгору зі швидкістю v_0. Знайти швидкість u, з якою тіло впаде донизу, якщо сила опору повітря має вигляд kv^2, де k-стала, v-швидкість тіла. (Відп. $u = v_0/\sqrt{1+kv_0^2/mg}$).

3.25. Крапля дощу падає на Землю. В момент коли прискорення краплі дорівнювало *7.5* м/с^2, її швидкість складала *20* м/с. Поблизу Землі крапля падала з постійною швидкістю і, впавши на бокове скло автомобіля, залишила на ньому слід під кутом $30°$ до вертикалі. Чи оштрафує інспектор ДАІ водія за перевищення швидкості, якщо дозволена швидкість руху автомобіля *60* км/год? Силу опору повітря вважати пропорційною квадрату швидкості краплі. (Відп. Штраф треба сплатити. Швидкість автомобіля ≈ 86 км/год.).

3.26. Десять мурашок вирішили стягнути соломинку. Чи зможуть вони здійснити задумане, якщо максимальне значення сили, яку може розвинути одна мурашка складає *0.09* сили тертя, що діє на соломинку, коли вона переміщується по столі? Коефіцієнт тертя $k=0.6$. Соломинка нескінченно тонка. Чи зможуть стягнути соломинку п'ять мурашок? (Відп. Десять мурашок можуть стягнути соломинку, якщо прикладуть силу F під кутом $\alpha = arctgk$ до площини столу, при цьому має виконуватись наступне співвідношення $F \ge F_{TP}/\sqrt{1+k^2} = 0.86F_{TP}$, де F_{TP} - сила тертя. П'ять мурашок зможуть стягнути соломинку, повертаючи її на площині столу з силою $F \ge 0.43F_{TP}$).

3.27. Наскільки і в який бік від вертикалі відхилиться в найвищій точці польоту гарматний снаряд, запущений на екваторі в вертикальному напрямку? (Відп. Снаряд відхилиться на захід відстанню $x \sim (2\pi/T)v_0^3/2g^2 \sim 10^2$ м, при $v_0 \sim 8{\cdot}10^2$ м/с).

3.28. Оцінити розміри дирижабля, наповненого гелієм. Вантажопідйомність дирижабля *100* т. (Відп. $r \sim \sqrt[3]{m/\pi\rho} \sim 10^2$ м, де $\rho \approx 1$ кг/м^3 — густина кисню).

3.29. Оцінити тиск кисню в шахті, глибина котрої дорівнює *10* км. (Відп. $p = p_0 + 2\rho gH \approx 3\cdot10^5$ Па, де ρ— густина кисню p_0 — 1 атм).

3.30. З якою найменшою швидкістю можна їхати на водних лижах? (Відп. $v \sim \sqrt{2mg/\rho S} \approx 2$ м/с, при m(маса людини) = *80* кг, S (площа лиж) = 0.4 м).

3.31. З якою мінімальною частотою людина повинна обертати відро з водою в вертикальній площині, щоб вода не виливалась? (Відп. $\nu \sim (1/2\pi)\sqrt{g/l} \approx 0.5$ Гц, при l (довжина руки) ~ 1 м).

3.32. Гімнаст виконує на турніку оберт — "сонечко". З якою силою він діє на турнік в той момент, коли його тіло проходить нижнє положення? (Відп. $F \sim 5mg \approx 3.5 \cdot 10^3$ Н, при m (маса людини) = 70 кг).

3.33. Оцінити швидкість спуску парашутиста з розкритим парашутом. (Відп. $v \sim \sqrt{mg/\rho\pi r^2} \approx 5$ м/с, при $m \sim 10^2$ кг, r (радіус парашута) ~ 3 м).

3.34. На якій найменшій швидкості велосипедист може перекинутись через голову разом з велосипедом, якщо переднє колесо застрягне, провалившись в отвір? (Відп. $v \sim \sqrt{2g\Delta h} \approx 3$ м/с, при Δh (висота підйому центру ваги системи) ~ 0.5 м).

3.35. Оцінити силу натягу ременів безпеки, що утримують людину в автомобілі, що, рухаючись зі швидкістю $v = 30$ км/год, стикається зі стовпом, внаслідок чого в автомобіля з'являється вм'ятина глибиною $l = 30$ см. (Відп. $F \sim mv^2/2l \approx 7 \cdot 10^3$ Н, при m (маса людини) = 60 кг).

3.36. Оцінити тиск кулькової ручки на папір при писанні. (Відп. $p \sim F/d^2 \approx 3 \cdot 10^7$ Па, при $F \sim 1$ Н, d (ширина сліду, що залишає кулька на папері) ~ 0.2 мм).

3.37. Довгу трубу, закриту знизу гладеньким поршнем, на якому розміщено снаряд, занурено в озеро. До якої максимальної швидкості сила тиску води може розігнати снаряд? (Відп. $v \sim \sqrt{gh} \sim 10^2$ м/с, при h (довжина труби) ~ 1 км).

3.38. Оцінити виштовхувальну силу, що діє на людину з боку повітря в кімнаті. (Відп. $F \sim mg\rho/\rho_0 \sim 1$ Н, де m (маса людини) = 75 кг, ρ — густина повітря, ρ_0 — густина води).

3.39. Людина йде слизьким льодом. Оцінити, якого максимального розміру кроки вона може робити, для того щоб не впасти. Довжина ноги людини $l = 1$ *м*. Коефіцієнт тертя об лід $\mu = 0.05$. (Відп. $L = 2l\mu/\sqrt{1+\mu^2} \approx 0.1$ м).

3.40. Оцінити: *а*) силу тиску вітру, що дме зі швидкістю *64* км/год, на стіну будинку довжиною *12* м і висотою *6* м; *б*) роботу, затрачену на будівлю Великої піраміди (піраміда Хеопса), в основі якої квадрат зі стороною *230* м. Висота піраміди *150* м. Як довго будувалась би піраміда, якби при її будівництві користувались послугами електростанції потужністю *60* МВт?; *в*) висоту струменя фонтану, до якого підводиться вода під тиском 3 атм. (Відп. *а*) $F = 3 \cdot 10^4$ Н; *б*) $A = 2.6 \cdot 10^{12}$ Дж, $t = 12$ год; *в*) $h = 16$ м).

4. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

4.1. Робота, енергія, закон збереження енергії

У механіці поняття роботи пов'язане з переміщенням тіла, на яке діє сила. Коли тіло під дією сталої сили $\vec{F}$ переміщується в якомусь напрямку на величину $|\Delta\vec{r}|$, то **роботою *A* *називають скалярний добуток векторів*** $\vec{F}$ **і** $\Delta\vec{r}$

$$A = \vec{F}\Delta\vec{r} = F\Delta r\cos\alpha, \qquad (4.1.1)$$

де α - кут між векторами $\vec{F}$ та $\Delta\vec{r}$.

У загальному випадку, коли сила $\vec{F}$ є функцією переміщення, маємо:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}, \qquad (4.1.2)$$

де $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ -радіус-вектори початкового та кінцевого станів тіла.

Із формули (4.1.1) видно що робота додатна, якщо кут $\alpha < 90^0$. Коли спрямування сили протилежне спрямуванню переміщення ($90^0 < \alpha < 180^0$), то робота сили від'ємна.

Зміну роботи з часом характеризує **потужність *N***.

Потужністю (миттєвою) ***називають величину, що дорівнює похідній за часом від роботи***

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Середньою потужністю ***називають відношення роботи*** $\Delta A = A(t_2) - A(t_1)$***, що здійснюється за інтервал часу*** $\Delta t = t_2 - t_1$***, до самого проміжку*** Δt.

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

З поняттям роботи пов'язані такі важливі характеристики руху тіл як кінетична та потенціальна енергії тіла.

Кінетичною енергією ***тіла E_K називають скалярну величину, яка визначається за формулою:***

$$E_K = \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2},$$

де m-маса тіла, $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ -швидкість тіла.

Кінетична енергія системи n тіл являє собою суму кінетичних енергій усіх тіл цієї системи

$$E_K = \sum_{i=1}^{n} E_{K_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}.$$

Якщо тіло, на яке діє сила, переміщується із точки $\vec{r}_1$ в точку із радіус-вектором $\vec{r}_2$, то робота, що при цьому виконується, дорівнює зміні кінетичної енергії тіла:

$$\Delta A = E_{K_2} - E_{K_1}.$$

У випадку, коли на тіло діє сила, що задається виразом:

$$\vec{F} = -\frac{dU(r)}{d\vec{r}} \equiv -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (4.1.3)$$

кажуть, що тіло знаходиться в потенціальному стаціонарному центрально-симетричному зовнішньому полі $U(r)$, а саму функцію $U(r)$ називають **потенціальною енергією тіла** в цьому полі.

Робота з переміщення тіла із точки $\vec{r}_1$ в точку з радіус-вектором $\vec{r}_2$ у такому полі визначається відповідно до формули (4.1.2)

$$\Delta A = U(r_1) - U(r_2),$$

тобто визначається тільки різницею потенціальних енергій початкового і кінцевого станів і не залежить від форми траєкторії тіла. Відповідно, якщо траєкторія тіла є замкненою, то $\Delta A = 0$.

Можна показати, що і в більш загальному випадку, а саме коли $U = U(\vec{r})$, робота ΔA також не залежить від форми траєкторії тіла. Силу, що визначається вищевказаним потенціалом $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$, називають **консервативною.**

Зазначимо також, що ***сили, які визначаються за формулою (4.1.3) називають,*** **центрально-симетричними силами**. Прикладами таких сил є сила тяжіння, сила пружності, сила гравітаційної взаємодії.

Суму кінетичної та потенціальної енергій системи тіл

$$W = E_k + U,$$

де U - являє собою повну потенціальну енергію системи, що складається із її внутрішньої $U^{(i)}$, та зовнішньої частини $U^{(e)}$, яка відповідає взаємодії системи з зовнішнім силовим полем (полями), називають **повною механічною енергією системи.**

Якщо система є замкненою (не віддає свою енергію та не отримує її ззовні), або зовнішні сили, що діють на систему, консервативні, то має місце **закон збереження повної механічної енергії**: ***Повна механічна енергія системи тіл при дії зовнішніх консервативних сил є величина стала (не залежить від часу), при будь яких механічних переміщеннях тіла або системи тіл.***

Підкреслимо, що закон збереження повної механічної енергії також виконується для зовнішніх сил, що мають гіротропний характер (наприклад, сила Лоренца).

4.1.1. Брусок масою m ковзає з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ по шорсткій горизонтальній поверхні. Порівняти роботу $A_{тр}$ сили тертя над бруском до його повної зупинки в лабораторній системі відліку з роботою $A_{тр}'$ в K'-системі, що рухається відносно лабораторної зі швидкістю $\vec{V} = \vec{v}_0$. (Відп. $A_{тр}' = -A_{тр} = mv_0^2/2$).

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Середньою потужністю ***називають відношення роботи*** $\Delta A = A(t_2) - A(t_1)$, ***що здійснюється за інтервал часу*** $\Delta t = t_2 - t_1$, ***до самого проміжку*** Δt.

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

З поняттям роботи пов'язані такі важливі характеристики руху тіл як кінетична та потенціальна енергії тіла.

Кінетичною енергією ***тіла E_K називають скалярну величину, яка визначається за формулою:***

$$E_K = \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2},$$

де m-маса тіла, $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ -швидкість тіла.

Кінетична енергія системи *n* тіл являє собою суму кінетичних енергій усіх тіл цієї системи

$$E_K = \sum_{i=1}^{n} E_{K_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2}.$$

Якщо тіло, на яке діє сила, переміщується із точки $\vec{r}_1$ в точку із радіус-вектором $\vec{r}_2$, то робота, що при цьому виконується, дорівнює зміні кінетичної енергії тіла:

$$\Delta A = E_{K_2} - E_{K_1}.$$

У випадку, коли на тіло діє сила, що задається виразом:

$$\vec{F} = -\frac{dU(r)}{d\vec{r}} \equiv -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (4.1.3)$$

кажуть, що тіло знаходиться в потенціальному стаціонарному центрально-симетричному зовнішньому полі $U(r)$, а саму функцію $U(r)$ називають **потенціальною енергією тіла** в цьому полі.

Робота з переміщення тіла із точки $\vec{r}_1$ в точку з радіус-вектором $\vec{r}_2$ у такому полі визначається відповідно до формули (4.1.2)

$$\Delta A = U(r_1) - U(r_2),$$

тобто визначається тільки різницею потенціальних енергій початкового і кінцевого станів і не залежить від форми траєкторії тіла. Відповідно, якщо траєкторія тіла є замкненою, то $\Delta A = 0$.

Можна показати, що і в більш загальному випадку, а саме коли $U = U(\vec{r})$, робота ΔA також не залежить від форми траєкторії тіла. Силу, що визначається вищевказаним потенціалом $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$, називають **консервативною**.

Зазначимо також, що ***сили, які визначаються за формулою (4.1.3) називають***, **центрально-симетричними силами**. Прикладами таких сил є сила тяжіння, сила пружності, сила гравітаційної взаємодії.

Суму кінетичної та потенціальної енергій системи тіл

$$W = E_k + U,$$

де U - являє собою повну потенціальну енергію системи, що складається із її внутрішньої $U^{(i)}$, та зовнішньої частини $U^{(e)}$, яка відповідає взаємодії системи з зовнішнім силовим полем (полями), називають **повною механічною енергією системи**.

Якщо система є замкненою (не віддає свою енергію та не отримує її ззовні), або зовнішні сили, що діють на систему, консервативні, то має місце **закон збереження повної механічної енергії**: ***Повна механічна енергія системи тіл при дії зовнішніх консервативних сил є величина стала (не залежить від часу), при будь яких механічних переміщеннях тіла або системи тіл.***

Підкреслимо, що закон збереження повної механічної енергії також виконується для зовнішніх сил, що мають гіротропний характер (наприклад, сила Лоренца).

4.1.1. Брусок масою m ковзає з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ по шорсткій горизонтальній поверхні. Порівняти роботу $A_{тр}$ сили тертя над бруском до його повної зупинки в лабораторній системі відліку з роботою $A'_{тр}$ в K'-системі, що рухається відносно лабораторної зі швидкістю $\vec{V} = \vec{v}_0$. (Відп. $A'_{тр} = -A_{тр} = mv_0^2/2$).

4.1.2. Монета масою m ковзає по горизонтальній поверхні столу, що має коефіцієнт тертя k. Під час руху вздовж осі x з початковою швидкістю v_1 шлях до зупинки монети був $S_1 = 30$ см, а вздовж осі y з початковою швидкістю v_2 шлях склав $S_2 = 40$ см. Чому дорівнює шлях до зупинки монети у випадку коли її початкова швидкість $\vec{v} = v_1\vec{e}_x + v_2\vec{e}_y$? (Відп. $S = S_1 + S_2$, $S = 70$ см).

4.1.3. Частка масою m рухається з початковою швидкістю $\vec{v}_0$ під дією сили $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, де α-додатна стала. Знайти роботу A цієї сили над часткою на шляху $S = mv_0/\alpha$. (Відп. $A = -mv_0^2/2$).

4.1.4. Частка рухається по колу під дією сили $\vec{F} = F(r)\vec{r}/r$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор, проведений з центру кола до частки. Знайти: *а)* миттєву потужність $P(t)$, що розвиває сила $\vec{F}$; *б)* роботу A_{12} сили на шляху між двома довільними точками на колі. (Відп. *а)* $P = \vec{F}\vec{v} = F(r)\vec{r}\dot{\vec{r}}/r = 0$; *б)* $A_{12} = 0$).

4.1.5. Тангенціальне прискорення частки, що рухається по якійсь криволінійній траєкторії, змінюється з шляхом S, який проходить частка від початкового положення, за законом $\omega_\tau = aS$, де a-стала. Чому дорівнює робота A сил, що діють на частку, на шляху S? Маса частки m. (Відп. $A = maS^2/2$).

4.1.6. Відома залежність модуля швидкості частки від часу $v = \left[(at)^2 + (bt^2)^2 + (ct^3)^2\right]^{1/2}$ і маса частки m. Знайти потужність $N(t)$ сили, що діє на частку. (Відп. $N(t) = d(mv^2/2)/dt = m(a^2t + 2b^2t^3 + 3c^2t^5)$).

4.1.7. Тіло масою m вільно падає з висоти h без початкової швидкості. Визначити: а) середню потужність $\langle N\rangle$, що розвивас сила тяжіння за час падіння тіла на Землю; б) миттєве значення цієї потужності на висоті $h/2$. (Відп. а) $\langle N\rangle = mg(gh/2)^{1/2}$; б) $N(h/2) = mg(gh)^{1/2}$).

4.1.8. Тіло масою m кинуто з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Нехтуючи опором повітря, знайти потужність $N(t)$, що розвиває сила тяжіння. (Відп. $N(t) = -mg(v_0\sin\alpha - gt)$).

4.1.9. Тягарці в машині Атвуда починають рух в момент часу $t=0$. Знайти : а) потужність $N(t)$, яку розвиває сила тяжіння, прикладена до тягарців в момент часу t; б) середню потужність $\langle N\rangle$ цих сил за перші τ секунд від початку руху тягарців. (Відп. а) $N(t) = g^2t(m_1 - m_2)^2/(m_1 + m_2)$; б) $\langle N\rangle = g^2\tau(m_1 - m_2)^2/2(m_1 + m_2)$).

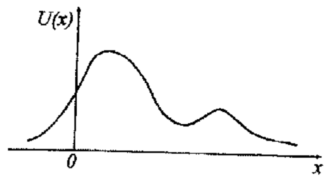
4.1.10. Потенціальна енергія частки має вигляд: *а)* $U = ax^3 + bx^2 + cz$; *б)* $U = axyz$. Знайти силу $\vec{F}$ що діє на частку. (Відп. *а)* $\vec{F} = -(3ax^2 + 2bx)\vec{e}_x - c\vec{e}_z$; *б)* $\vec{F} = -a(yz\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + xy\vec{e}_z)$).

4.1.11. Частка масою $m = 4$ г рухається в двовимірному полі, де її потенціальна енергія $U = \alpha xy$, $\alpha = 0.19$ мДж/м^2. В точці *1* {3м, 4м} частка мала швидкість $v_1 = 3$м/с, а в точці 2 {5м, –6м} швидкість v_2 = 4м/с. Знайти роботу зовнішніх сил між точками *1* і 2. (Відп. $A = m(v_2{}^2 - v_1{}^2)/2 + \alpha(x_2y_2 - x_1y_1) = 6$ мДж).

4.1.12. Чи є сили: *а)* $\vec{F} = (y^2 - x^2)\vec{e}_x + 3xy\vec{e}_y$; *б)* $\vec{F} = ax\vec{e}_x - by\vec{e}_y + cz\vec{e}_z$; *в)* $\vec{F} = ay\vec{e}_x + bx^2\vec{e}_y$ консервативними? У позитивному випадку знайти потенціальну енергію $U(\vec{r})$. (Відп. Сила консервативна у випадку *б)* і потенціальна енергія має вигляд: $U(\vec{r}) = -ax^2/2 + by^2/2 - cz^2/2$).

4.1.13. Потенціальна енергія частки $U(\vec{r}) = ax^2/2 + by^2/2 - cz^2/2$, a, b, c — сталі. Знайти: *а)* силу, що діє на частку; *б)* роботу A, котру здійснює над часткою сила поля при переміщенні частки із точки $P_1(\vec{r}_1)$ в точку $P_2(\vec{r}_2)$; *в)* приріст ΔT кінетичної енергії частки, що стався внаслідок цього. (Відп. *а)* $\vec{F} = -(ax\vec{e}_x + by\vec{e}_y - cz\vec{e}_z)$;
б) $A = a(x_1^2 - x_2^2)/2 + b(y_1^2 - y_2^2)/2 - c(z_1^2 - z_2^2)/2$; *в)* $\Delta T = A$).

4.1.14. Графік потенціальної енергії частки в якомусь полі відображений на рис. 9. Відобразити якісно графік проекції на вісь x сили
$\vec{F}$, що діє на частку. Визначити на цьому графіку положення рівноваги частки. (Відп. див. рис.9).



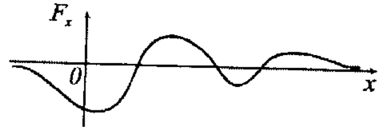


рис.9

4.1.15. Доведіть, що якщо при зіткненні двох часток кінетична енергія зберігається, то вона зберігається і в будь який іншій системі координат, яка рухається з постійною швидкістю відносно даної, і якщо в якійсь системі відліку кінетична енергія часток змінюється, то така ж зміна буде виявлена і в усіх інших інерціальних системах відліку.

4.1.16. Визначити кінетичну енергію гусениці танка, що рухається зі швидкістю v. Відстань між осями коліс, на які одягнуто гусеницю дорівнює l. Радіус коліс r. Вага одиниці довжини гусениці P. (Відп. $T = 2Pv^2(\pi r + L)/g$).

4.1.17. Невеличка шайба зковзує без початкової швидкості з вершини гладенької гірки, що має висоту H. Гірка має горизонтальний трамплін (див. рис.10). Якою має бути висота h трампліна, щоб шайба пролетіла найбільшу відстань S? Чому вона дорівнює? (Відп. $h = H/2; S_{\max} = H$).

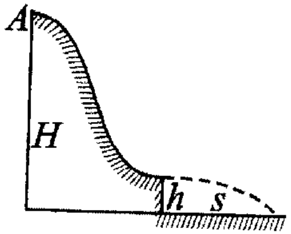


рис.10

4.1.18. Тіло A починає ковзати з висоти h у похилому жолобі, що переходить у півколо радіуса $h/2$ (див. рис.11). Нехтуючи тертям знайти швидкість тіла у найвищій точці його траєкторії (після відриву від жолоба).
(Відп. $v = 2\sqrt{gh/27}$).

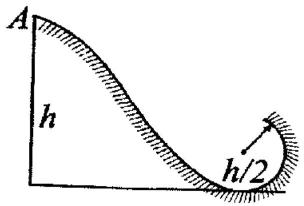


рис.11

4.1.19. Замкнена система складається з двох однакових взаємодіючих часток. В якісь момент часу t_0 швидкість однієї з часток дорівнює нулю, а іншої $\vec{v}$. Коли відстань між частками виявилась такою ж як і в момент t_0, то швидкість однієї з часток стала $\vec{v}_1$. Чому дорівнює в цей момент швидкість другої частки та кут між напрямками їх руху? (Відп. $v_2 = \sqrt{v^2 - v_1^{\,2}}$, *90°*).

4.1.20. Тіло кидають вертикально вгору і вимірюють повний час його польоту. В якому випадку цей час більший — за наявності сили опору повітря, яку можна вважати пропорційною швидкості тіла, чи за відсутності сили опору? (Відп. У другому випадку час більший).

4.1.21. Горизонтально розташований диск обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = 5$ рад/с навколо своєї осі. Із центру диска з початковою швидкістю $v_0 = 2$ м/с рухається невеличка шайба масою $m = 160$ г. На відстані $r = 50$ см від осі диска її швидкість виявилась $v = 3$ м/с відносно диска. Знайти роботу, котру здійснила при цьому сила тертя, що діє на шайбу, в системі відліку "диск". (Відп. $A_{TP} = m(v^2 - v_0^2 - \omega^2 r^2)/2 = -0.1$ Дж).

4.1.22. Оцінити потужність, що виділяється у вигляді тепла при екстренному гальмуванні вантажівки. (Відп. $P = mv^3/4l \approx 10^6$ Вт, при $v \sim 60$ км/год, m (маса вантажівки) $\sim 10^4$ кг, l (гальмівний шлях) ~ 10 м).

4.1.23. Оцінити відношення потужності, яку розвиває коник при стрибку, до його маси. (Відп. $P/m \sim (2gH)^{3/2}/4l \approx 0.8$ кВт/кг, при H (висота стрибка коника) ~ 1 м, l (довжина ноги коника) $\sim 3\cdot10^{-2}$ м).

4.1.24. П'ятьма ударами молотка цвях забито в дерев'яну стінку. Яку силу потрібно прикласти до головки цвяху щоб витягнути його із стінки? (Відп. $F \sim 5mv^2/2l \approx 10^3$ Н, при m (маса молотка) ~ 1 кг, v (швидкість молотка) ~ 5 м/с, l (довжина молотка) ~ 0.1 м).

4.1.25. Оцінити, яке зусилля розвиває ногами людина приземлюючись після стрибка із другого поверху. (Відп. $F \sim mgh/l \approx 3.5\cdot10^3$ Н, при m (маса людини) ~ 70 кг, h/l (h — висота другого поверху, l — відстань, на яку присідає людина) ~ 5).

4.1.26. Оцінити зусилля спортсмена при штовханні ядра. (Відп. $F \sim mgL/2l \approx 8 \cdot 10^2$ Н, при m (маса ядра) ~ 8 кг, L (довжина польоту ядра) ~ 20 м, l (довжина руки) ~ 1 м).

4.2. Закони збереження імпульсу та моменту імпульсу

В розділі "Динаміка частки" було введено поняття імпульсу тіла (частки) $\vec{P} = m\dot{\vec{r}} = m\vec{v}$, де m, $\vec{r}$ і $\vec{v}$ - маса, радіус-вектор і швидкість тіла. Узагальнимо це поняття на систему двох або більше тіл.

Повним імпульсом, або **вектором кількості руху** системи тіл (часток) називається векторна сума імпульсів окремих тіл (часток)

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i, \qquad (4.2.1)$$

де m_i, $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ -маса, радіус-вектор та швидкість i-го тіла відповідно, n- кількість часток, що утворюють систему.

Точка, радіус-вектор котрої, відносно початку координат, визначається за формулою:

$$\vec{R}_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

***називають* центром мас системи (ЦМС) часток.**

З введенням центру мас системи, повний імпульс системи часток (4.2.1) можна записати в такому вигляді:

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}}_C,$$

де $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$.

З поняттям центру мас системи пов'язана також важлива теорема про кінетичну енергію механічної системи, так звана **теорема Кьоніга**. Ця теорема стверджує, що ***кінетичну енергію механічної системи можна надати в вигляді суми двох доданків: кінетичної енергії її поступального руху та кінетичної енергії руху часток відносно її центру мас***

$$E_к = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\vec{v}_{i_C}\right)^2,$$

де $\vec{v}_{i_C}$ - швидкість i частки відносно центру мас системи.

Зміну імпульсу системи з часом визначає основне рівняння динаміки (3.1), котре з урахуванням (4.2.1) та третього закону Ньютона, має вигляд:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{(e)}, \qquad (4.2.2)$$

де $\sum \vec{F}_i^{(e)}$ -рівнодійна зовнішніх сил, що діють на систему.

Якщо система замкнена, або зовнішні сили компенсують одна одну, то із (4.2.2) випливає $d\vec{P}/dt = 0$ і $\vec{P} = const$.

Таким чином можна сформулювати **закон збереження імпульсу**. ***Повний імпульс замкненої системи тіл (*** $\sum \vec{F}_i^{(e)} = 0$ ***) не змінюється при будь-якій взаємодії та рухах тіл (часток) цієї ж системи.***

Із закону збереження імпульсу та означення ЦМС випливає, що система відліку з початком в ЦМС є інерціальною, і при переході до неї повний імпульс системи тіл (часток) дорівнює нулю.

Крім вектора імпульсу важливу роль в механіці **відіграє вектор моменту імпульсу**, котрий визначається:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right]. \qquad (4.2.3)$$

Диференціюючи за часом вираз (4.2.3), та враховуючи (4.2.1), (4.2.2) і третій закон Ньютона, отримуємо вираз для зміни вектора $\vec{L}$ з часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)}, \qquad (4.2.4)$$

де $\vec{N}^{(e)} = \sum \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right]$- повний момент зовнішніх сил.

Для систем, у яких $\vec{N}^{(e)} = 0$ із (4.2.4) випливає, що $\vec{L} = const$ і повний момент імпульсу залишається незмінним, як за величиною так і за напрямком. Цей висновок і складає **закон збереження моменту імпульсу.** При цьому рівність $\vec{N}^{(e)} = 0$ виконується як для замкнених систем, так і у випадку дії на систему (це випливає з означення $\vec{N}^{(e)}$) зовнішньої центрально-симетричної сили, якщо початок системи координат співпадає з центром поля, що обумовлює силу.

Якщо дорівнює нулю один або два компоненти $\vec{N}^{(e)}$, то зберігаються лише відповідні компоненти вектора моменту імпульсу, хоча повний момент імпульсу при цьому може не зберігатись.

Використовуючи формалізм центру мас системи, момент імпульсу системи можна записати в вигляді

$$\vec{L} = \vec{L}_C + \left[\vec{R}_C \times \vec{P}\right],$$

де вектор $\vec{L}_C = \sum\limits_i \left[\vec{r}_{i_c} \times \vec{p}_{i_c}\right]$ ($\vec{r}_{i_c}$, $\vec{p}_{i_c}$ - радіус вектор та імпульс i частки відносно ЦМС) називають власним механічним моментом системи.

Зауважимо, що у виразах (4.2.3), (4.2.4) моменти імпульсу та сили визначено відносно точки ($\vec{r}_i$-радіус-вектор відносно початку координат). У випадку, коли частка може обертатись навколо нерухомої осі OZ, моментами імпульсу та сили відносно цієї осі називають проекції векторів $\vec{L}$ та $\vec{N}^{(e)}$ на задану вісь. При цьому вектори $\vec{L}$ та $\vec{N}^{(e)}$ визначаються відносно довільної точки O', що знаходиться на осі. Виходячи із вищенаведеного означення для моментів сили та імпульсу можна показати, що вибір точки O' на осі OZ не впливає на значення моментів відносно осі, а самі моменти визначаються таким чином: $\vec{L}_{OZ} = [\vec{r}_\perp \times \vec{p}_\perp]_{OZ}$, $\vec{N}^{(e)}_{OZ} = \left[\vec{r}_\perp \times \vec{F}^{(e)}_\perp\right]_{OZ}$, де $\vec{p}_\perp$, $\vec{F}_\perp$ – складові імпульсу та сили, що знаходяться в площині, перпендикулярній до осі OZ, $\vec{r}_\perp$ – вектор, що з'єднує в площині дії сили вісь з точкою, в якій прикладено $\vec{p}_\perp$, або $\vec{F}_\perp$.

4.2.1. Частка масою m і зарядом q попадає в стале однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$. Початкова швидкість частки

$\vec{v} = v_0\vec{e}_x$. Який вигляд має траєкторія руху частки? Знайти приріст імпульсу $\Delta\vec{p}$ та приріст кінетичної енергії ΔT частки за час:

а) $\tau_1 = \pi m/qB$; *б)* $\tau_2 = 2\pi m/qB$. (Відп. *а)* $\Delta\vec{p} = -2mv_0\vec{e}_x$; *б)* $\Delta\vec{p} = 0$, $\Delta T = 0$ в обох випадках).

4.2.2. Частка масою m і зарядом q потрапляє в однорідне електричне поле з напруженістю $\vec{E} = -E_0\vec{e}_y$. Початкова швидкість частки $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$. *а)* Який вигляд має траєкторія частки?; *б)* Отримати залежність імпульсу $\vec{p}$ частки від часу; *в)* Чому дорівнює імпульс частки на виході з поля якщо його протяжність вздовж осі x дорівнює l? (Відп. *б)* $\vec{p}(t) = m\vec{v} - qE_0t\vec{e}_y$; *в)* $\vec{p}_{\text{вих}} = mv_0\vec{e}_x - qE_0(l/v_0)\vec{e}_x$).

4.2.3. Частка з зарядом q, що має імпульс $\vec{p}_0 = p_x\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z$, потрапляє в однорідне нестаціонарне електричне поле. Напруженість поля $\vec{E}(t) = E_0t^2\vec{e}_x$, де E_0 — стала. Який буде мати імпульс $\vec{p}$ частка за час τ після перебування її в полі. (Відп. $\vec{p}(\tau) = \left(p_x + qE_0\tau^3/3\right)\vec{e}_x + p_y\vec{e}_y + p_z\vec{e}_z$).

4.2.4. М'яч, що рухається зі швидкістю v=*10*м/с вдаряється об ногу футболіста. З якою швидкістю має рухатись нога футболіста для того, щоб після зіткнення з ногою м'яч зупинився? Вважати масу м'яча набагато меншою за масу ноги футболіста, а удар абсолютно пружним. (Відп. Нога футболіста має рухатись в напрямку руху м'яча зі швидкістю v=5м/с).

4.2.5. З якою швидкістю v має летіти снаряд масою $m = 10$ кг, щоб при зіткненні з судном масою $M = 100$ т воно набуло швидкість $v_1 = 0.1$ м/с? Зіткнення вважати непружним. (Відп. $v = 1000$ м/с).

4.2.6. Артилеристи стріляють так, щоб ядро влучило в ворожий табір. В момент вильоту ядра з гармати на нього сідає верхи барон Мюнхаузен, і тому ядро падає, не долетівши до цілі. Яку частину шляху потрібно пройти пішки барону Мюнхаузену, щоб досягти ворожого табору? Вважати посадку барона Мюнхаузена на ядро абсолютно непружним ударом. Маса барона в п'ять разів більша за масу ядра. (Відп. $\Delta L/L = 35/36$, ΔL — частина шляху, що проходить Мюнхаузен до табору, L — відстань від гармати до табору).

4.2.7. Два автомобілі рухаються назустріч один одному в дощову погоду. В першому автомобілі лобове скло має кут нахилу до горизонту $\alpha_1=30^o$, в другому $\alpha_1=15^o$. При якому відношенні швидкостей автомобілів v_1/v_2 водії побачать градини такими, що відскакують від лобового скла їх автомобіля у вертикальному напрямку? Вважати рух градин відносно Землі вертикальним. (Відп. $v_1/v_2 = tg2\alpha_1/tg2\alpha_2 = 3$).

4.2.8. На клин, що утворює кут $45°$ з горизонтом, падає кулька. Що являє собою траєкторія кульки після зіткнення з клином? Поверхня клина гладенька, зіткнення пружне. (Відп. Кулька відіб'ється від клина в горизонтальному напрямку і почне рухатись по параболі).

4.2.9. В брусок масою M, що знаходиться на горизонтальній площині, б'ється шматочок пластиліну масою m. Швидкість пластиліну до удару $\vec{v}_0$ і утворює кут α з нормаллю до поверхні бруска (див. рис.12). Вважаючи, що удар здійснюється за дуже малий час, визначити роботу сили тертя $A_{тр}$ над бруском з прилиплим до нього пластиліном від моменту початку руху до його зупинки. (Відп. $A_{тр} = -(mv_0 \cos\alpha)^2/2(M+m)$).

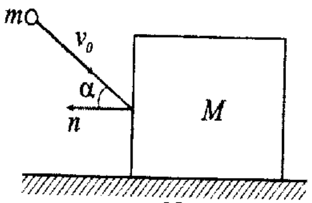


рис.12

4.2.10. Невагома пружина з жорсткістю k і довжиною l закріплена в вертикальному положенні на столі. З висоти H над столом на пружину падає вільно з нульовою початковою швидкістю невеличка кулька масою m (див. рис.13). Знайти максимальний імпульс кульки під час її руху вниз.

(Відп. $p_{max} = \{2m[mg(H-l)+(mg)^2/2k]\}^{1/2}$).

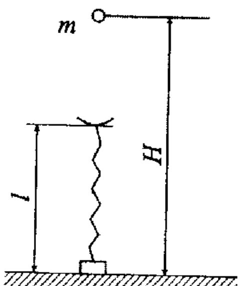


рис.13

4.2.11. Система складається із трьох часток, маси котрих $m_1=0.1$г, $m_2=0.2$г, $m_3=0.3$г. Перша частка знаходиться в точці з координатами $(1,2,3)$, друга - в точці $(2,3,1)$, третя – в точці $(3,1,2)$ (координати надані в сантиметрах). Визначти радіус-вектор $\vec{R}_c$ центру мас системи (Відп. $\vec{R}_c = (14\vec{e}_x + 11\vec{e}_y + 11\vec{e}_z)/6$).

4.2.12. Дві ідеально пружні кульки з масами m_1 та m_2 рухаються вздовж однієї прямої зі швидкостями v_1 і v_2. За час зіткнення кульки починають деформуватися, і частина кінетичної енергії переходить у потенціальну енергію деформації. Потім деформація зменшується, і запасена потенціальна енергія переходить в кінетичну. Знайти значення потенціальної енергії деформації в той момент, коли вона максимальна. (Відп. $U = m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 / 2(m_1 + m_2)$).

4.2.13. Частка масою m_1 зазнала пружне зіткнення з нерухомою часткою m_2 ($m_1 > m_2$). Знайти максимальний кут, на який може відхилитись налітаюча частка внаслідок такого зіткнення. (Відп. $\sin\vartheta_{max} = m_2/m_1$).

4.2.14. Частка масою m рухається в площині xy по колу радіуса R. В якийсь момент часу її положення визначається радіус-вектором $\vec{r}$. Швидкість частки $\vec{v}$, її тангенціальне прискорення $\vec{w}_\tau$ (див. рис.14). Знайти *а*) момент імпульсу частки $\vec{L}_0$ відносно точки O; *б*) момент $\vec{N}_0$ сил, що діють на частку відносно точки O. (Відп. *а*) $\vec{L}_0 = mvR\,\vec{e}_z$; *б*) $\vec{N}_0 = mw_\tau R\,\vec{e}_z$).

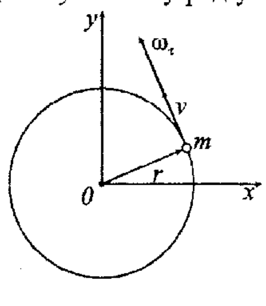


рис.14

4.2.15. До точки, радіус-вектор котрої відносно початку координат O дорівнює $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$, прикладено силу $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j}$, де a, b, A, B — сталі, $\vec{i}$, $\vec{j}$ — орти вісей x і y. Знайти момент $\vec{N}$, і плече l сили $\vec{F}$ відносно точки O. (Відп. $\vec{N} = (aB - bA)\vec{k}$, де $\vec{k}$ — орт осі z, $l = |aB - bA|/\sqrt{A^2 + B^2}$).

4.2.16. Момент імпульсу частки відносно деякої точки O змінюється з часом за законом $\vec{L} = \vec{a} + \vec{b}t^2$, де $\vec{a}, \vec{b}$ — сталі вектори і $\vec{a} \perp \vec{b}$. Знайти відносно точки O момент $\vec{N}$ сили, що діє на частку коли кут між векторами $\vec{N}$ і $\vec{L}$ дорівнює $45°$. (Відп. $\vec{N} = 2\vec{b}\sqrt{a/b}$).

4.2.17. Невеличка шайба $m = 50$ г починає ковзати з вершини гладенької похилої площини (див. рис.15). Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 15°$. Знайти модуль моменту імпульсу шайби відносно вісі що перпендикулярна до площини рисунка та проходить через точку О, через $t=1.3$ с після початку руху. (Відп. $N = mght\sin 2\alpha/2$).

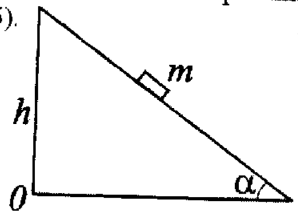


рис.15

4.2.18. Однорідна прямокутна цеглина лежить на похилій площині (див. мал. до задачі **4.2.17**). Яка половина цеглини, права чи ліва, здійснює більший тиск на похилу площину? (Відп. Тиск з боку правої половини цеглини на площину більший за тиск з боку лівої).

4.2.19. Розглянемо ізольовану систему, що складається із трьох часток *1, 2, 3,* (див. рис.16), сили взаємодії між якими можна вважати центральними: $F_{12} = 10^{-5}$ н, $F_{13} = 6\cdot 10^{-6}$ н, $F_{23} = 7.5\cdot 10^{-6}$ н. Доведіть, що момент внутрішніх сил дорівнює нулю: $\vec{N} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = 0$.

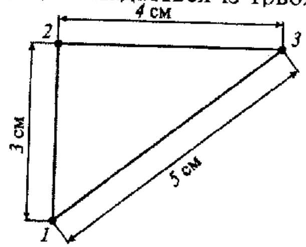


рис.16

Покажіть, що якщо взяти момент імпульсу $\vec{L}$ і момент сили $\vec{N}$ відносно центру мас, який співпадає з початком координат, то існує співвідношення $d\vec{L}/dt = \vec{N}$ навіть якщо центр мас має змінну швидкість $\vec{v}(t)$ відносно деякої інерціальної системи відліку.

4.2.20. При гальмуванні всіма чотирма колесами гальмівний шлях автомобіля дорівнює L. Знайти гальмівні шляхи L_1 і L_2 цього ж автомобіля при гальмуванні тільки передніми та тільки задніми колесами. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює $k = 0.8$. Центр мас автомобіля розміщено на рівній відстані від передніх та задніх коліс на висоті $h = l/4$ над поверхнею Землі, l — відстань між вісями автомобіля.
(Відп. $L_1 = 2L(1 - kh/l) = 1.6L$, $L_2 = 2L(1 + kh/l) = 2.4L$).

4.2.21. Снаряд розривається на два однакові уламки у верхній точці траєкторії на висоті $h=19.6$ *м*. Через $t=1$ *с* після вибуху один уламок падає на Землю на тому місці, де стався вибух. На якій висоті від місця пострілу впаде другий уламок, якщо перший впав на відстані $l=1$ *км*? Опір повітря не враховувати. (Відп. $L = l\left(1 + \frac{2}{t}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 5$км).

4.2.22. Невеличкій шайбі, що розташована на внутрішній гладенькій поверхні нерухомого круглого конусу на висоті h_1 від його вершини, надано в горизонтальному напрямку по дотичній до поверхні конусу швидкість v_1. На яку висоту h_2 від вершини конуса підніметься шайба? (Відп. $h_2 = \left(1 + \sqrt{1 + 8gh_1/v_1^2}\right)v_1^2/4g$).

4.2.23. Снаряд, що летить зі швидкістю $v=500$ м/с розривається на три однакових уламки. При цьому кінетична енергія системи збільшується в $k = 1.5$ рази. Яку максимальну швидкість може мати один із уламків? (Відп. $v_{\max} = v\left(1 + \sqrt{2(k-1)}\right) = 1$ км/с).

4.2.24. Оцінити силу натягу ланцюга велосипеду при підйомі вгору. (Відп. $F \sim 2mg \approx 1.4\cdot 10^3$ Н, при m (маса людини) = 70 кг).

4.2.25. З якою швидкістю летіла крапля води, якщо при зіткненні з нерухомою стінкою вона здійснює на неї тиск $p \sim 10^6$ Па? (Відп. $v \sim \sqrt{p/\rho} \approx 30$ м/с, ρ — густина води).

4.2.26. Оцінити швидкість куль, що вилітають із патронів, кинутих у вогнище. Швидкість кулі v при стрільбі із рушниці ~ 800 м/с. (Відп. $u \sim v\sqrt{l/L(1 + m_к/m_г)} \approx 40$ м/с, при l/L (l — довжина частини кулі всередині гільзи, L — довжина розгону кулі в стволі) ~ 10^2, $m_к/m_г$ ($m_к$ — маса кулі, $m_г$ — маса газу) ~3).

4.2.27. Уявімо собі, що в якийсь момент у всіх молекул кисню, які знаходяться всередині футбольного м'яча, що лежить на землі, швидкість виявилась би напрямленою вертикально вгору. На яку висоту злетів би м'яч? (Відп. $H \sim m^2v^2/M^2 2g \approx 2$ м, де m (маса молекул) ~ 6 г, v — швидкість молекул ~ $4\cdot 10^2$ м/с, М (маса м'яча) ~ $4\cdot 10^2$ г).

5. РЕАКТИВНИЙ РУХ. РУХ ТІЛА ЗІ ЗМІННОЮ МАСОЮ

***Рух, що є наслідком приєднання або відокремлення з деякою швидкістю речовини, яка утворює або оточує тіло, називають* реактивним рухом**. Рективний рух здійснюється за рахунок сили тяги, що виникає згідно ІІІ з. Ньютона як реакція на відокремлення речовини. Двигун, що забезпечує пересування тіла згідно вказаного принципу, називають реактивним. Зазначимо, що до цього типу двигунів відносяться також гвинтові двигуни. Силою тяги в цьому випадку виступає реактивна сила, яка виникає внаслідок прискорення лопостями гвинта повітря або іншого в'язкого середовища в напрямку, протилежному напрямку руху тіла. При цьому, звичайно, повітря, що відкидає такий двигун, ні в один момент часу, не є частиною маси тіла.

В основі теоретичного розгляду реактивного руху знаходиться рівняння динаміки (4.2.2).

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}. \qquad (5.1)$$

Особливим випадком реактивного руху тіла є рух тіла зі змінною масою, що відбувається за рахунок відокремлення від тіла частини його маси. Типовим прикладом такого руху є рух ракет з силою тяги, яка виникає за рахунок реакції струменя, вилітаючих з великою швидкістю газів.

Виходячи із формули (5.1) можна отримати рівняння, яке описує реактивний рух ракети **(рівняння Мещерського)**

$$m\vec{w} = \vec{F} - \mu\vec{u},$$

де m, $\vec{w}$ - маса та прискорення ракети в момент часу t, $\vec{F}$ -зовнішня сила, $\mu = dm/dt$ - витрати газу, $\vec{u}$ - швидкість струменя газів відносно ракети, $\mu\vec{u}$ - **реактивна сила.**

5.1. Ракета випускає безперервний струмінь газу, що має швидкість $\vec{u}$ відносно ракети. Витрата газу дорівнює μ кг/с. Довести, що рівняння руху ракети має вигляд: $m\vec{w} = \vec{F} - \mu\vec{u}$, де m — маса ракети в даний момент часу, $\vec{w}$ — її прискорення, $\vec{F}$ — зовнішня сила.

5.2. Використовуючи результати попередньої задачі, знайти співвідношення, що зв'язує швидкість v, досягнуту ракетою, з її

масою M в один і той самий момент часу (ф-ла К.Е. Ціолковського). Маса ракети при старті M_0, швидкість газового струменя u відносно ракети стала і спрямована проти її руху. (Відп. $\exp(v/u) = M_0/M$).

5.3. Узагальнити формулу К.Е. Ціолковського на випадок релятивістських рухів ракети. Вважати, що швидкість ракети та газового струменя спрямовані вздовж однієї прямої. (Відп. $M_0/M = \left((1+\beta)/(1-\beta)\right)^{c/2u}$).

5.4. Космічний корабель рухається з постійною за величиною швидкістю v. Для зміни напрямку його польоту вмикається двигун, що викидає струмінь газу зі швидкістю u відносно корабля в напрямку, перпендикулярному до його траєкторії. Визначити кут α, на який відхилиться вектор швидкості корабля, якщо його початкова маса m_0, кінцева m, а швидкість u стала. (Відп. $\alpha = u(\ln m_0/m)/v$).

5.5. Для міжзоряних польотів ідеальною могла б бути фотонна ракета, в котрій речовина перетворюється на електромагнітне випромінювання. Роль газового струменя відіграє пучок фотонів, що їх випромінює ракета в заданому напрямку. Визначити потужність фотонної ракети, котра рухається за межами Сонячної системи з нерелятивістською швидкістю і постійним прискоренням $g = 10$ м/с^2. Маса ракети $m = 1$ т. (Відп. $N = mcg = 3\cdot 10^9$ кВт).

5.6. Ракета рухається за відсутністю зовнішніх сил, випускаючи безперервний струмінь газу зі швидкістю $\vec{u}$, сталою відносно ракети. Знайти швидкість ракети $\vec{v}$ в момент коли її маса дорівнює m, якщо в початковий момент ракета мала масу m_0 і її швидкість дорівнювала нулю. (Відп. $\vec{v} = -\vec{u}\ln(m_0/m)$).

5.7. Ракета тримається в повітрі на сталій висоті викидаючи вертикально вниз струмінь газу зі швидкістю $u = 900$ м/с. Знайти: *а)* скільки часу ракета може залишатись в стані спокою, якщо початкова маса палива складає $k = 25\%$ від її маси (без палива); *б)* яку масу газів $\mu(t)$ повинна викидати ракета щосекунди, щоб залишатись на сталій висоті, якщо початкова маса ракети (з паливом) дорівнює m_0. (Відп. *а)* $t = (u/g)\ln(1+k) = 20c$, *б)* $\mu = (g/u)m_0\exp(-gt/u)$).

5.8. Візок з піском рухається по горизонтальній площині під дією сталої сили $\vec{F}$, що співпадає з напрямком її швидкості. Під час руху пісок висипається через отвір у дні зі сталою швидкістю μ кг/с. Знайти прискорення і швидкість возика в момент часу t, якщо при $t = 0$ возик з піском мав масу m_0 і його швидкість дорівнювала нулю. Тертям знехтувати.

(Відп. $\vec{w} = \vec{F}/(m_0 - \mu t)$, $\vec{v} = (\vec{F}/\mu)\ln[m_0/(m_0 - \mu t)]$).

5.9. Відро масою M тягнуть із колодязя мотузком, прикладаючи постійну силу F. Вода, початкова маса якої m, тече з відра з постійною швидкістю таким чином, що за час t, який становить менше повного часу підйому відра із колодязя, вся вода витікає. Чому дорівнює швидкість відра в момент часу t? (Відп. $v = \frac{Ft}{m}\ln\left(\frac{M+m}{M}\right) - gt$).

5.10. Однорідний ланцюг висить вертикально, торкаючись своїм кінцем поверхні столу. Ланцюг відпускають. Показати, що сила тиску ланцюга на стіл збільшується із часом за квадратичним законом, досягаючи величини, в три рази більшої за вагу ланцюга, в момент часу, коли верхній його кінець впаде на стіл.

5.11. Реактивний літак, незалежно від швидкості, спалює за хвилину 40.8 кг палива і 2720 кг повітря, викидаючи продукти палива зі швидкістю 487 м/с відносно літака. Нехтуючи опором повітря, оцініть максимальні тягу, потужність і швидкість літака. (Відп. $F = 2.24\cdot10^4$ Н, $v = 495$ м/с, $N = 5.54\cdot10^3$ кВт.).

5.12. Крапля дощу починає в момент часу $t=0$ падати в повітрі, що містить нерухому пару води. За час падіння, за рахунок конденсації пари на краплі, маса краплі збільшується за законом $m = m_0 + \alpha t$. На краплю, що рухається, діє сила тертя $\vec{F}_{TP} = -mk\vec{v}$. Знайти швидкість $\vec{v}(t)$ краплі. (Відп. $\vec{v}(t) = g/k - g(\alpha - m_0 k)e^{-kt}/k^2(m_0 + \alpha t)$).

5.13. Сферична крапля рідини вільно падає в атмосфері, пересиченою водяною парою. Вважаючи, що швидкість зростання маси краплі dm/dt пропорційна до її поверхні і нехтуючи силою опору середовища, визначити рух краплі. Вважати, що в момент зародження краплі ($t = 0$), швидкість її падіння дорівнює 0. (Відп. Падіння краплі буде рівноприскореним з прискоренням $w = g/4$).

5.14. На авісалоні в м. Бурже (Франція) завод АНТК ім. Антонова, після освоєння новітніх технологій, хоче запропонувати макет сучасного військового гвинтокрилу. Гвинтокрил являє собою кулю, що рухається за рахунок гвинта. Якою має бути потужність макету, якщо потужність N діючого гвинтокрилу складає $3\cdot10^5$ Вт, а його лінійні розміри в $n=100$ разів більші за розміри макету? (Відп. $N_{мак} = Nn^{-7/2}$=$3\cdot10^{-2}$Вт).

6. НЕІНЕРЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ ВІДЛІКУ

Неінерціальні системи відліку - ***це системи відліку, що рухаються з прискоренням, або здійснюють будь який обертальний рух відносно інерціальних систем відліку.***

Динаміка тіла в неінерціальній системі відліку описується рівнянням:

$$m\vec{w} = \vec{F} + \vec{I},$$

де $\vec{w}$ -прискорення тіла масою m в неінерціальній системі відліку, $\vec{F}$ - рівнодійна сил, що діють на тіло в неінерціальній системі відліку;

$$\vec{I} = -m\ddot{\vec{R}}_0 - m[\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}] - m[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{\rho}]] - 2m[\vec{\omega}\times\vec{v}] \qquad (6.1)$$

сила інерції.

У виразі (6.1) $\ddot{\vec{R}}_0$ та $\vec{\omega}$ - прискорення поступального руху та вектор кутової швидкості обертання неінерціальної системи відліку відносно інерціальної, $\vec{\rho}$, $\vec{v}$ -радіус-вектор та швидкість тіла в неінерціальній системі відліку. Як можна побачити із (6.1), сила інерції являє собою суму декількох доданків, два останні з яких мають відповідні назви **Відцентрової** та **Коріолісової сили**.

Зазначимо також, що істотною відзнакою сили інерції від звичайних сил, є її природа. Так, у всіх без вийнятку випадках, джерелом звичайних сил виступають матеріальні об'єкти, в той час як причиною виникнення сили інерції виступає неінерціальність системи відліку.

6.1. Дві неінерціальні системи відліку S' і S'' співпадають в момент $t = 0$ з інерціальною системою S. В цей момент система S''

має початкову швидкість v_0 вздовж осі x, а система S' не рухається. В момент $t = 0$ обидві системи S' і S'' одержують однакове прискорення $\vec{w}$ вздовж осі x. Визначте: *а*) як змінюється з часом положення O' і O'' відносно O?; *б*) з'ясуйте, як положення x' і x'' матеріальної точки пов'язані з її положенням x в системі відліку S? *в*) напишіть відносно системи відліку S рівняння і закон руху матеріальної точки, на яку діє стала сила $\vec{F}$. Перетворіть рівняння руху до систем S' і S''. Чи з'являться в перетворених рівняннях сила інерції?; *в*) чи будуть стала сила $\vec{F}$ і сила інерції однаковими в системах відліку S' і S''? Якою буде швидкість системи S'' відносно системи S'?; *г*) що можна сказати про прикладену силу $\vec{F}$ і сили інерції в обох системах S' і S'' в загальному випадку, коли вони рухаються зі сталою швидкістю відносно одна одної?

6.2. Неінерціальна система відліку K' пов'язана з візком, що рухається вздовж горизонтальної площини з прискоренням $\vec{w}_0$ відносно інерціальної K. По візку рухається людина масою m. Знайти реакцію опори $\vec{N}$ на людину, якщо вона рухається відносно візка: а) зі сталою швидкістю; б) зі сталим прискоренням $\vec{w}'$. (Відп. а) $\vec{N} = m(\vec{w}_0 - \vec{g})$; б) $\vec{N} = m(\vec{w}_0 + \vec{w}' - \vec{g})$).

6.3. Горизонтальний диск обертають зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 6$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить крізь його центр. Вздовж одного із діаметрів диска рухається тіло масою $m = 0.5$ кг зі сталою, відносно диска, швидкістю $v = 50$ см/с. Знайти силу, з якою диск діє на тіло в той момент, коли воно знаходиться на відстані $r = 30$ см від осі обертання. (Відп. $F = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2 + (2v\omega)^2} = 8\text{ Н}$).

6.4. Визначити, яку додаткову швидкість надає ракеті, що стартує з екватора Землі, обертання Землі навколо своєї осі? Період добового обертання Землі $T=86164с$. (Відп. v=467м/с).

6.5. Визначити за добу різницю ходу між маятниковими годинниками, розташованими на екваторі та полюсі Землі відповідно. Земля здійснює повний оберт навколо осі за $T=86164с$. (Відп. Годинник на екваторі відстає на $\Delta t \approx 3.5$ хв. від годинника на полюсі).

6.6. Рушницю спрямували на вертикальну позначку мішені, яка знаходиться рівно на північ, і вистрілили. Нехтуючи опором повітря, визначити, на скільки сантиметрів і в який бік відхилиться від позначки куля в момент попадання в мішень. Постріл проведено в горизонтальному напрямку на широті $\varphi = 60°$, швидкість кулі $v = 900$ м/с, відстань до мішені $s = 1$ км (Відп. куля відхилиться на схід на $h \approx (\omega s^2/v)\sin\varphi = 7см$, де ω — кутова швидкість обертання Землі).

6.7. Людина масою $m = 60$ кг рівномірно рухається по периферії горизонтальної круглої платформи радіуса $R = 3$ м, яку обертають з кутовою швидкістю $\omega = 1$ рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. Знайти горизонтальну складову сили, що діє на людину з боку платформи, якщо результуюча сил інерції, прикладених до неї в системі відліку "платформа", дорівнює нулю. (Відп. $F = m\omega^2 R/4 = 45\text{ Н}$).

6.8. В діаметрально протилежних точках каруселі діаметром $D = 20$ м, що обертається зі сталим кутовим прискоренням β, знаходяться стрілець та мішень. Стрілець цілиться в мішень, не вводячи поправку на обертання каруселі. Яким має бути кутове прискорення каруселі β, щоб при цих умовах куля влучила в ціль? В момент пострілу кутова швидкість каруселі була $\omega_0 = 1$ рад/хв, швидкість кулі $v_0 = 200$ м/с, впливом відцентрової сили знехтувати. (Відп. $\beta = 4v_0\omega_0/D = 2/3\text{ рад/с}^2$).

6.9. На широті $\varphi = 60°$ в Землю вертикально зарито рейку довжиною $l = 10$ м. Оцінити різницю потенціалів U, котра виникає між кінцями рейки внаслідок обертання Землі. (Відп. $U \approx m_e(l/e)\omega_З^2 R_З \cos^2\varphi \approx 5\ 10^{-13}\text{В}$).

6.10. Уявімо собі, що в Земній кулі по діаметру, в площині екватора просвердлено канал. Знайти силу, з якою буде діяти на стінку каналу тіло, що падає по ньому з поверхні Землі, в той момент коли воно досягне центру Землі. Вважати, що тертя відсутнє, а густина Землі однорідна. (Відп. $F = 4\pi P\sqrt{R/g}/T \approx 0.12P$, де P — вага тіла на поверхні Землі).

6.11. На внутрішній поверхні сфери радіуса R, що обертається навколо вертикальної вісі з постійною кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, знаходиться невеличке тіло A (див. рис.17). Вважаючи відомим кут α, знайти мінімальний коефіцієнт тертя k_{min}, при якому тіло не зрушить з місця під час обертання? (Відп. $k_{min} = (g - \omega^2 R\cos\alpha)\sin\alpha / (g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha)$).

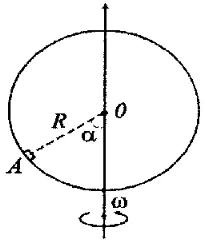


рис.17

6.12. На екваторі з висоти $h = 500$ м на поверхню Землі падає тіло (без початкової швидкості відносно Землі). Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань і в який бік відхилиться від вертикалі тіло? (Відп. Тіло відхилиться на Схід на відстань $x \approx 2\omega h\sqrt{2h/g}/3 = 24$ см, ω — кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі).

6.13. У ліфті, що вільно падає в однорідному полі тяжіння, обертається кільце радіусом R=*20см,* зі сталим кутовим прискоренням β=$10c^{-2}$, по якому ковзає без тертя невеличка шайба з масою *m=5г*. Кільце обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини кільця. Кільце почало обертатись в момент *t=0*, коли швидкість шайби відносно кільця дорівнювала $v_0 = 10\,м/c$ і була спрямована в напрямку обертання кільця. Знайти миттєві потужності рівнодійної сили, що діє на шайбу через τ*=10c* в системах відліку "кільце" та "ліфт" (Відп. В системі відліку "кільце" $P = mR\beta(-v_0 + \beta R\tau) = 0.1Bm$, в системі відліку "ліфт" P=0).

6.14. Кільце може ковзати без тертя вздовж недеформованого стрижня. Стрижень обертається з кутовою швидкістю ω в вертикальній площині біля горизонтальної вісі, що проходить через один із його кінців перпендикулярно до стрижня. Відстань від осі обертання до кільця r. Вважаючи, що при *t=0* кільце перебуває в стані спокою в точці *r=0*, та те, що стрижень від осі обертання був спрямований вертикально вниз, знайти *r(t).* (Відп. $r(t) = \dfrac{g(ch\omega t - \cos\omega t)}{2\omega^2}$).

6.15. Визначити величину і напрямок відхилення, обумовленого обертанням Землі: *а)* підвісу, закріпленого на верхівці Ейфелевої

башти; *б)* траєкторії тіла, що падає з верхівки. Ейфелева башта має довжину *300* м і знаходиться на 49^o північної широти. (Відп. *а)* 0.5 м до Півдня; *б)* 0.5 м до Півдня і 7.5 см до Сходу).

7. РУХ У ПОЛІ ЦЕНТРАЛЬНИХ СИЛ

Рух тіла в полі, що задається потенціальною енергією U=U(r), де r-модуль відстані тіла до силового центру називають рухом у полі центральних сил. Оскільки при цьому сила, яка діє на тіло, є центрально-симетричною (див. 4.1.3), то зберігається повна механічна енергія W. Крім того, зберігається момент імпульсу $\vec{L}$ тіла відносно силового центру, оскільки момент центральної сили при цьому $[\vec{r} \times \vec{F}(r)] \equiv 0$.

Збереження незмінним напрямку вектора $\vec{L}$ спричиняє те, що рух тіла в полі центральних сил є пласким; траєкторія тіла лежить в площині, перпендикулярній до $\vec{L}$.

Важливим випадком дії центральних сил є рух тіла в гравітаційному полі з потенціальною енергією тіла

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r}, \qquad (7.1)$$

де G=$6.67\times10^{-11}\dfrac{нм^2}{кг^2}$, m і M-маси тіл, що знаходяться на відстані r одне від одного.

Якщо розміри тіл не є знехтовно малими, то за відстань r між ними обирають відстань між центрами мас тіл.

Робота, що здійснюється при переміщенні тіла масою m в гравітаційному полі, утвореному тілом масою M, визначається згідно з формулою (4.1.2), із якої випливає

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}, \qquad (7.2)$$

де $\vec{F} = -\dfrac{\partial U}{\partial \vec{r}} = G\dfrac{Mm}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ — **гравітаційна сила**, що діє з боку тіла масою M, на тіло масою m, $\vec{r}$ -вектор, спрямований з тіла m в тіло масою M, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$-радіус-вектори початкового та кінцевого положення тіла m.

Розписуючи далі вираз (7.2), знаходимо :

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} G\frac{mM}{r^2}dr = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (7.3)$$

Із формули (7.3) можна побачити, що робота A обумовлюється тільки початковим та кінцевим положеннями тіла відповідно висновків гл.4 відносно роботи консервативних сил.

Зауважимо, що вираз (7.3) отримано для випадку, коли тіла m і M розглядаються як частки. Тоді відстані, на яких знаходяться тіла набагато перебільшують їх розміри. У випадку коли це наближення не виконується, інтегрування в (7.3) необхідно проводити з урахуванням розподілу густини маси тіл.

Застосування законів збереження моменту імпульсу та енергії з потенціальною енергією (7.1) до руху планет сонячної системи, визначає закони їх руху, що були вперше сформульовані Кеплером та в подальшомуобгрунтовані Ньютоном:

1. ***Планети рухаються відносно Сонця по еіліптичних траєкторіях, в одному із фокусів яких знаходиться Сонце.***
2. ***Радіус вектор планети (початок системи координат співпадає з Сонцем) за однакові інтервали часу описує однакові площини.***
3. ***Відношення a^3/T^2, де а-величина великої півосі еліптичної орбіти, по якій рухається навколо Сонця планета, Т-період обертання планети, є сталою величиною для всіх планет Сонячної системи.***

В свою чергу для штучних супутників визначають так звані три космічні швидкості:

Перша космічна швидкість. ***V_I – це мінімальна швидкість, яку слід надати тілу під час запуску з довільної планети, щоб воно стало штучним супутником планети. Для Землі V_I – складає 7.9 км/с.***

Друга космічна швидкість. ***V_{II} – це мінімальна швидкість, яку слід надати тілу, щоб воно подолало тяжіння планети і стало супутником Сонця. Для Землі V_{II} = 11.2 км/с.***

Третя космічна швидкість. ***V_{III} – це мінімальна швидкість, яку слід надати тілу щоб воно змогло здолати тяжіння Сонця та покинути Сонячну систему. Якщо тіло стартує з поверхні Землі, то V_{III} = 16.7 км/с.***

7.1. На якій відстані від Землі, на прямій Земля-Місяць сили притягання тіла до Землі і Місяця рівні за модулем? (Відп. $r \approx 3.4\cdot10^5$ км).

7.2. Побудуйте графіки напруженості поля і потенціалу, що утворюються сферичним шаром масою M, як функцію відстані до центру. Зовнішній радіус шару R_1, внутрішній R_2. (Відп.

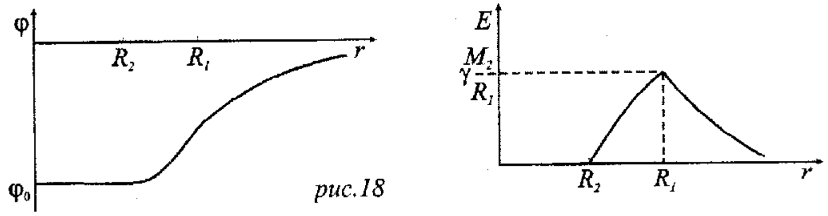


рис.18

$\varphi_0 = -2GM(R_1R_2)/(R_1^2 + R_2^2 + R_1^2R_2^2)$, див. рис.18).

7.3. Чому дорівнює момент імпульсу (відносно центру орбіти) супутника Землі масою M_C, який рухається по коловій орбіті радіуса R? (Відп. $L = (GM_3M_C^2R)^{1/2}$).

7.4. Виразити кінетичну, потенціальну і повну енергії супутника масою M, що рухається по коловій орбіті радіуса R, через момент імпульсу L. (Відп. $E_k = L^2/2MR^2$, $U = -L^2/MR^2$, $W = -L^2/2MR^2$).

7.5. Розглядається точкова маса m з абсцисою x, що знаходиться на перпендикулярі до середини прямолінійної нитки довжиною $2L$ і масою M. Початок системи координат знаходиться в одній із точок нитки. Знайдіть вираз для потенціальної енергії цієї системи, що спадає до нуля при $x \to \infty$. (Відп. $U = -(GMm/L)\ln\left|\left(L + (x^2 + L^2)^{1/2}\right)/x\right|$).

7.6. Доведіть, що на точкову масу M, яка знаходиться на відстані R від нескінченної прямолінійної нитки з густиною ρ на одиницю довжини, діє сила $F = 2G\rho M/R$.

7.7. Знайдіть величину взаємодії гравітаційної енергії системи з восьми зірок, кожна з яких має масу, що дорівнює масі Сонця, і розташована в одній з вершин куба з довжиною ребра 1 парсек (власну енергію кожної з зірок не враховувати). (Відп. $U = 2 \cdot 10^{35}$ Дж).

7.8. Планета масою m рухається по еліпсу навколо Сонця таким чином, що найменша і найбільша відстані її від Сонця дорівнюють r_1 та r_2 відповідно. Знайти момент імпульсу L цієї планети відносно центру Сонця. (Відп. $L = m\sqrt{2Gm_c r_1 r_2/(r_1 + r_2)}$, де m_c маса Сонця).

7.9. Планета рухається по еліптичній орбіті навколо Сонця. В момент, коли вона знаходилась на відстані r_0 від Сонця, її швидкість дорівнювала v_0, а кут між радіус-вектором $\vec{r}_0$ і вектором швидкості $\vec{v}_0$ складав α. Знайти найбільшу та найменшу відстані, на які, рухаючись віддаляється планета від Сонця при своєму русі.
(Відп. $r_m = \left[1 \pm \sqrt{1-(2-k)k\sin^2\alpha}\right] r_0/(2-k)$, де $k = r_0 v_0^2/Gm_c$, m_c маса Сонця).

7.10. Довести, що сила тяжіння, яка діє на частку всередині однорідного сферичного шару речовини, дорівнює нулю.

7.11. Розглянемо однорідну сферичну масу, що знаходиться в гідростатичній рівновазі. Радіус її R, густина ρ. *а*) доведіть, що тиск на відстані r від центра цієї маси дорівнює $P = 2\pi\rho^2 G(R^2 - r^2)/3$; *б*) розрахуйте за цією формулою тиск у центрі Землі при $R = 6.3 \cdot 10^6$ м і середній густині $\rho = 5.5 \cdot 10^3$ кг/м^3. (Відп. $P = 1.7 \cdot 10^9$ н/м^2).

7.12. Як зміниться третій закон Кеплера, якщо не нехтувати масою планети m по відношенню до маси Сонця M? (Відп. $a^3/T^2(M+m) = G/4\pi^2$).

7.13. Мінімальна відстань між компонентами подвійної зірки, що обертаються одна навколо другої, дорівнює r_1. Відносна швидкість їх в цьому положенні дорівнює v_1. Сума мас обох компонентів дорівнює M. Знайти відстань r_2 між компонентами та їх відносну швидкість v_2 при максимальному віддаленні їх один від одного. (Відп. $r_2 = \left(2GM/\left(2GM - r_1 v_1^2\right) - 1\right) r_1$, $v_2 = r_1 v_1/r_2$, зірка розпадається якщо $v_1 \geq \sqrt{2GM/r_1}$).

7.14. Показати, що якщо планета рухається по еліпсу то середні за часом значення її повної і кінетичної енергії пов'язані співвідношенням $\langle E_к \rangle = -\langle W \rangle$, а у випадку руху по колу $E_к = -W$.

7.15. Штучний супутник Землі було виведено на орбіту з максимальним віддаленням від поверхні Землі $h_{max} = 1300$ км та мінімальним $h_{min} = 292$ км. Через деякий час період обертання супутника зменшився на $\Delta T = 3$ хв. Яка частина початкової повної енергії супутника була витрачена до цього моменту часу на роботу проти сил тертя? Радіус Землі $R = 6370$ км.
(Відп. $\Delta W/W = -2\Delta T/3T \approx -0.02(W < 0)$).

7.16. Із штучного супутника, що рухається по коловій орбіті зі швидкістю v_0, стріляють у напрямку, котрий утворює кут $\varphi = 120°$ до курсу. Знайти швидкість v кулі відносно супутника, щоб куля пішла в нескінченність. (Відп. $v = v_0$).

7.17. Частку масою m переміщено із центра основи однорідної напівкулі масою M і радіуса R на нескінченність. Яку роботу здійснила при цьому гравітаційна сила, що діє на частку з боку напівкулі? (Відп. $A = -3GmM/2R$).

7.18. Кульова туманність має масу приблизно $4 \cdot 10^{11}$ сонячних мас і діаметр ~ 10^5 світлових років. Яку швидкість необхідно надати тілу, котре знаходиться на краю туманності, щоб воно покинуло цю зоряну систему? (Відп. $v \approx 300$ км/с).

7.19. На якій висоті над полюсом Землі прискорення вільного падіння спадає на один процент? В 2 рази? (Відп. 32 км, 2650 км).

7.20. Із нескінченності по радіусу до нерухомого центру тяжіння починає рухатись снаряд ($V_\infty = 0$). В момент часу $t = t_0$ на відстані $r_0 = 10^4$ км від центру тяжіння, коли імпульс снаряда дорівнював $p_0 = 500$ кг·м/с, він вибухає і розривається на два рівних за масою уламки. В результаті один із уламків починає рухатись по коловій орбіті відносно центру тяжіння. Знайти моменти імпульсів уламків відносно силового центру та енергію Q вибуху, якщо маса снаряда $m = 12$ кг. (Відп. $L_1 = L_2 = r_0 p_0/2\sqrt{2} \approx 1.79 \cdot 10^9\ кг \cdot м^2/с$, $Q = 3\,p_0^2/4m = 15625$ Дж).

7.21. Космічний корабель рухається до Місяця під дією його притягання. На великій відстані швидкість корабля відносно Місяця дорівнювала нулю. Прискорення вільного падіння на поверхні Місяця в *6* разів менше за Землє ($g_M = g/6$). Радіус Місяця *1700* км. На якій висоті h над поверхнею Місяця треба включити гальмівний двигун для здійснення м'якої посадки? Вважати, що двигун утворює п'ятикратне перевантаження ($5g$). Зміною маси корабля при гальмуванні і залежністю сили гальмування від висоти знехтувати (Відп. $h \approx 55$ км).

7.22. Чи зможе астронавт, підскочивши, назавжди покинути астероїд, маса якого дорівнює $M = 1.1 \cdot 10^{16}$ кг і радіус $R = 11.1$ км? (Відп. Ні, не зможе).

7.23. Обчислити радіус колової орбіти стаціонарного супутника Землі, що залишається нерухомим відносно її поверхні. Чому дорівнює його швидкість в інерціальній системі відліку, пов'язаної в даний момент з центром Землі?

(Відп. $r = \sqrt[3]{GM\left(T/2\pi\right)^2} = 4.210^4\,км$, де M і T маса Землі та період її обертання навколо її осі, 3.1 км/с).

7.24. Потрібно вивести космічний корабель на навколосонячну орбіту з перигелієм (найближча точка до Сонця) *0.01* радіуса земної орбіти і періодом, що співпадає з періодом обертання Землі навколо Сонця. З якою швидкістю і в якому напрямку відносно прямої Земля-Сонце потрібно запустити корабель із Землі? Орбітальна швидкість Землі *30* км/с. (Відп. $v \approx 40$ км/с, $\alpha \approx 40°$).

7.25. Супутник масою *1* т, запущений на колову орбіту висотою *500* км над поверхнею Землі, гальмується в атмосфері. На якій висоті буде супутник через місяць, якщо гальмуюча сила з боку атмосфери $2.07 \cdot 10^{-3}$ Н? (Відп. $h = 490$ км).

7.26. Штучний супутник Місяця рухається по коловій орбіті, радіус якої в k разів більше за радіус Місяця. Зважаючи, що невелика сила опору, котру зазнає супутник з боку космічного пилу, залежить від його швидкості як $F = \alpha v^2$, де α стала, знайти час руху супутника до падіння на поверхню Місяця.

(Відп. $t \approx \left(\sqrt{k} - 1\right)m/\alpha\sqrt{gR}$).

7.27. Два однакових тіла рухаються навколо Землі в одному напрямку по дотичних траєкторіях. Перше тіло рухається по колу радіуса R. Друге тіло має вдвічі більший за перше тіло період. В деякий момент вони стиковуються. Визначте максимальну відстань від центру Землі тіла, що утворилося. (Відп. $R_{max} = 1.4\,R$).

7.28. Уявіть собі, що Земля — однорідна куля, повністю покрита водою. При обертанні Землі з кутовою швидкістю ω поверхня води (поверхня рівня моря) приймає форму сплюснутого сфероїда. Знайдіть наближений вираз для різниці глибин моря на полюсі і на екваторі, припускаючи, що поверхня рівня моря є поверхнею сталої потенціальної енергії (на чому ґрунтується це припущення?). Гравітаційне притягання часток води одна до одної не враховувати. (Відп. $h_{ек} - h_{пол} \approx \omega^2 R_З^2/g \approx R_З/288$).

7.29. В момент часу $t=0$ космічна лабораторія, що вільно падає (без обертання) по радіусу на центр Землі, має повну енергію $W=0$ і знаходиться на відстані $r_0 = 10^5$км від центру Землі. Розміри лабораторії $10 \times 10 \times 10$м. Знайти час Δt протягом якого цю лабораторію можна вважати інерціальною системою відліку з похибкою не більше $\alpha = 1\%$. Впливом інших планет і Сонця знехтувати. Маса Землі $M = 6 \cdot 10^{24}$кг. (Відп. $\Delta t = \frac{r_0^{3/2}}{3}\sqrt{\frac{2}{GM}}\left[1 - (1-\alpha)^{3/4}\right] \approx \frac{\alpha}{4} r_0^{3/2}\sqrt{\frac{2}{GM}} \approx 3$ хв).

7.30. Знайдіть відношення максимальних припливоутворюючих сил, що спричинені Місяцем та Сонцем. (Відп. $F_M/F_C = \left(M_M/M_C\right)\left(R_C/R_M\right)^3 \approx 2.4$, де M_M, M_C, і R_M, R_C - маси Місяця, Сонця та відстані між Місяцем та Землею і Сонцем та Землею відповідно).

7.31. Найбільша відстань комети Галея від Сонця $h = 35.4$, найменша $l = 0.59$ (за одиницю прийнято відстань від Землі до Сонця). В точці найбільшого віддалення комети від Сонця (в афелії) лінійна швидкість її руху $v_1 = 0.91$ км/с. Яка лінійна швидкість v_2 комети, коли вона найближче підходить до Сонця (в перигелії)? В якому році комету можна буде бачити з Землі, якщо останнє її проходження поблизу Сонця було в 1986 році?

(Відп. $v_2 = v_1 h/l = 54.6$ км/с, в 2062 році).

7.32. Визначити час падіння Землі на Сонце, якщо її раптово зупинити. (Відп. $t = 65$ діб).

7.33. Два велетні на полюсі Землі кидають вертикально вгору палиці. Перша впала через тиждень, друга — через *30* днів. Оцінити, наскільки відрізнялись їх швидкості. (Відп. $\Delta v = 75$ м/с).

7.34. Визначити другу космічну швидкість для Місяця, якщо маса Місяця $M_M = 7.3 \cdot 10^{22}$кг, радіус Місяця $R_M = 1.7 \cdot 10^6 м$. (Відп. $v_{II} = \left(2GM_M/R_M\right)^{1/2} \approx 2.4 км/с$).

7.35. Оцінити середню густину речовини Сонця. (Відп. $\rho_c \sim 24\pi\alpha^{-3}/T^2G \approx 1$ г/см^3, де $\alpha = D_c/r_c \approx 0.01$ — кутовий розмір Сонця (D_c — діаметр Сонця, r_c — відстань від Землі до Сонця), $T \approx \pi\, 10^7$с = 1 рік, G — гравітаційна стала).

8. ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

При вивченні динаміки твердого тіла будемо використовувати модель **абсолютно твердого тіла.** В рамках цієї моделі тверде тіло розглядається як система часток, відстані між якими не змінюються з часом в процесі руху тіла. Ця модель є досить вдалою, якщо нас не цікавить внутрішній рух атомів, котрі утворюють тверде тіло, і за умови, що цей рух не впливає на рух центру мас твердого тіла (див. нижче) та обертальний рух тіла. Однак при вивченні хвильових процесів у твердому тілі, наприклад, розповсюдження звуку, модель абсолютно твердого тіла непридатна і слід використовувати модель абсолютно пружного тіла.

Загально довільний рух твердого тіла можна розглядати як сукупність поступального та обертального рухів. Відповідно, динаміка твердого тіла визначається за допомогою рівнянь, що описують ці рухи:

$$d\vec{P}\Big/dt = \sum \vec{F}_i^{\,(e)},\ d\vec{L}\Big/dt = \vec{N}^{(e)}, \qquad (8.1)$$

де $\vec{P}$ - імпульс, $\vec{L}$ - момент імпульсу твердого тіла, $\sum \vec{F}_i^{(e)}$ і $\vec{N}^{(e)} = \sum\left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right]$- сума зовнішніх сил, що діють на тіло та момент цих сил відносно інерціальної системи відліку.

Центр мас (інерції) твердого тіла є вектор, що визначається таким чином:

$$\vec{R}_C = \int \frac{\vec{r}\rho(r)dv}{M}, \qquad (8.2)$$

де $\vec{r}$ -радіус-вектор довільної точки твердого тіла відносно обраної системи координат, початок якої може знаходитись як у самому тілі, так і за його межами, $\rho(r)$ - густина тіла, M - його маса, інтегрування здійснюється за об'ємом тіла.

Виходячи із моделі абсолютно твердого тіла та означення центру мас тіла (8.2), рівняння системи (8.1) можна переписати у вигляді :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{(e)},\ \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{N}_C^{(e)}, \qquad (8.3)$$

де $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}_C$ - імпульс центра мас твердого тіла відносно нерухомої системи координат, $\vec{L}_C$ – момент імпульсу обчислений відносно центру мас твердого тіла в рухомій системі координат, $\vec{N}_C^{(e)} = \sum_i \left[\vec{r}_{i_C} \times \vec{F}_i^{(e)}\right]$ – момент зовнішніх сил також відносно центру мас твердого тіла, $\vec{r}_{i_C}$ – радіус-вектор сили відносно центра мас тіла.

Рівняння (8.3) і складають основу динаміки твердого тіла.

Обертальний рух твердого тіла відносно осі характеризує **момент інерції** твердого тіла, що визначається таким чином:

$$\Im = \int r^2 dM = \int r^2 \rho(r) dv,$$

де r – найкоротша відстань від довільної точки тіла до осі обертання, $\rho(r)$ – функція густини твердого тіла.

Дослід та теорія показують, що через довільну точку твердого тіла завжди можна провести три взаємно перпендикулярні осі, які мають таку властивість:

Момент інерції тіла відносно однієї із них максимальний, відносно другої мінімальний, відносно третьої має проміжне значення, що не співпадає з першими двома. Такі осі називають **головними осями**

інерції тіла, а відповідні моменти інерції - **головними моментами інерції** тіла, їх позначають $\Im_1, \Im_2, \Im_3$.

При обертанні тіла з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$, компоненти якого спрямовані вздовж головних осей інерції, вектор моменту імпульсу тіла $\vec{L}_C$ має вигляд:

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^{3} \Im_i \omega_i \vec{e}_i \,, \tag{8.4}$$

де $\vec{e}_i$ -відповідні одиничні орти.

Диференціюючи за часом вираз (8.4) з урахуванням (8.1) та формул Пуансо: $d\vec{e}_i/dt = [\vec{\omega} \times \vec{e}_i]$, знаходимо рівняння обертального руху відносно рухомої (жорстко зв'язаної з тілом) системи координат - **рівняння Ейлера:**

$$\Im_i \frac{d\omega_i}{dt} + \sum_{k,\ell} \varepsilon_{ik\ell} \Im_i \omega_k \omega_\ell = N_{C_i}^{(e)} \,,$$

де $\varepsilon_{ik\ell}$ -символ Леві-Чівіта, $N_{C_i}^{(e)}$ - проекція вектора $\vec{N}_C^{(e)}$ на i-вісь.

У випадку, коли тіло обертається навколо нерухомої осі OZ, напрямок якої не співпадає з жодною із головних осей інерції тіла, проекція вектора $\vec{L}$ на цю вісь дорівнює:

$$L_z = \Im_z \omega_z \,,$$

де $\Im_z$ - момент інерції тіла відносно осі OZ, ω_z - частота обертання. Відповідно рівняння обертального руху тіла відносно цієї осі має вигляд:

$$\Im_z \frac{d\vec{\omega}_z}{dt} = \vec{N}_z^{(e)} \,, \tag{8.5}$$

де $\vec{N}_z^{(e)}$ - вектор моменту зовнішніх сил відносно наданої осі.

Рівняння (8.5) називають **основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі**.

Якщо вісь не проходить через центр мас тіла, то момент інерції тіла $\Im_z$ відносно осі обертання визначається за **теоремою Гюйгенса-Штейнера**:

$$\Im_z = \Im_C + Ma^2 \,,$$

де $\Im_C$ -момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас тіла паралельно наданої, M-маса тіла, a-відстань між осями.

Кінетична енергія твердого тіла ***являє собою суму двох доданків: поступального руху центру мас тіла та енергії обертального руху відповідно:***

$$E_k = \frac{MV_c^2}{2} + T_{обер} \,.$$

Якщо в якості осей системи координат, пов'язаних з тілом, обрані головні осі інерції тіла, то $T_{обер}$ має вигляд:

$$T_{обер} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \Im_i \omega_i^2 \,.$$

Енергія обертального руху відносно осі, що не співпадає з жодною з осей вказаної системи координат визначається таким чином:

$$T_{обер} = \frac{1}{2} \Im_z \omega_z^2 \,,$$

де $\Im_z$ - момент інерції, а ω_z - частота обертання відносно наданої осі.

8.1. Обруч масою m і радіусом R обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі z, що проходить через центр обруча (точка O) перпендикулярно до його площини. Знайти момент імпульсу обруча: *а)* відносно точки O; *б)* відносно точки O', що лежить на осі обертання.
(Відп. *а)* $\vec{L}_0 = m\omega R^2 \vec{e}_z$; *б)* $\vec{L}_{0'} = \vec{L}_0 + m\left[\overline{O'O}, \vec{v}_c\right] = \vec{L}_0$).

8.2. Оцінити момент інерції молекули ДНК відносно її осі. Вважати молекулу "щільно запакованою" спіраллю з радіусом $R = 6.7\,\mathring{A}$. Маса молекули ДНК складає $M \approx 1.2\ 10^8$ а.о.м. (Відп. $I_z \sim MR^2/2 \sim 10^{-38}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$).

8.3. Однорідний диск масою m і радіусом R обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі OO', що проходить через центр диска перпендикулярно до його площини. Знайти *а*) імпульс диска $\vec{P}$; *б*) момент імпульсу відносно центру мас; *в*) кінетичну енергію диска.

(Відп. *а*) $\vec{P} = m\vec{v}_c = 0$; *б*) $\vec{L}_c = mR^2\vec{\omega}/2$; *в*) $E_к = mR^2\omega^2/4$).

8.4. Знайти відношення кінетичних енергій обертального та поступального рухів циліндра, що скочується без ковзання з похилої площини. (Відп. 1/2).

8.5. Оцінити час, за який подвійна спіраль молекули ДНК (див. задачу **8.2**) може розкрутитись на дві окремі спіралі, якщо кількість її витків $N = 1.2 \cdot 10^4$, а кінетична енергія обертання молекули $E_k = 2.1 \cdot 10^{-21}$Дж (Відп. $t = 2\pi N\left(I_z/2T\right)^{1/2} \sim 10^{-4}$с).

8.6. Однорідний брусок завдовшки $2h$ і вагою P збалансовано на нерухомому горизонтальному циліндрі радіуса a, вісь котрого перпендикулярна довгій грані бруска. Покажіть, що при повороті бруска від горизонтального положення на кут θ зміна потенціальної енергії бруска дорівнює $P\left(a\sin\theta - (a+h)(1-\cos\theta)\right)$, і знайдіть умову рівноваги. Проковзування відсутнє. (Відп. $h < a$).

8.7. Знайти головні осі інерції та головні моменти інерції: *а*) порожньої кулі, зовнішній діаметр котрої D, внутрішній — d; *б*) тора, середній радіус котрого R, а радіус поперечного перетину r.

(Відп. *а*) $J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = M\left(D^5 - d^5\right)/10\left(D^3 - d^3\right)$;

б) $J_{xx} = J_{yy} = \dfrac{M}{2}\left(R^2 + \dfrac{5r^2}{4}\right)$).

8.8. Однорідний диск радіусом R розкручено до кутової швидкості ω. Після цього його поклали на горизонтальну поверхню. Скільки часу диск буде обертатись на поверхні, якщо коефіцієнт тертя дорівнює η? (Відп. $t = 3\omega R/4\eta g$).

8.9. Горизонтально розміщений круглий диск масою M=10кг може обертатись навколо вертикальної вісі, що проходить через точку на його ободі. В цій точці знаходиться собака масою m=5кг. Знайти кут φ на який повернеться диск, якщо собака зробить один оберт по ободу. (Відп. $\varphi = \pi\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+8m/3M}}\right) \approx 62^\circ$).

8.10. З похилої площини, що утворює кут α з горизонтом скочується без ковзання однорідний диск. Знайти лінійне прискорення центру диска. (Відп. $w = 2/3g\sin\alpha$).

8.11. Знайти прискорення центру однорідної кулі, що скочується без ковзання з похилої площини, яка утворює кут α з горизонтом. Чому дорівнює сила тертя зчеплення кулі та площини? (Відп. $w = 5g\sin\alpha/7$, сила тертя дорівнює $2mg\sin\alpha/7$, де m — маса кулі).

8.12. На горизонтальній площині знаходиться котушка з нитками масою m (див. рис.19). Момент інерції котушки відносно її осі I. Котушку тягнуть за нитку з силою F. [...] силою і горизонтом котушка буде рухатись прискорено в бік натягнутої нитки? Якою має бути сила F, для того, щоб проковзування було відсутнє? Коефіцієнт тертя між котушкою і площиною μ. (Відп.

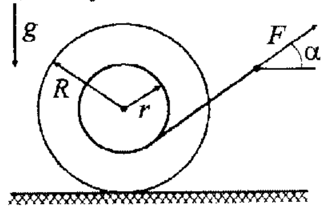


Рис.19

$\cos\alpha > r/R$, $F \le \mu mg\left(I + mR^2\right)/\left(I\cos\alpha + \mu\left(I + mR^2\right)\sin\alpha + mRr\right)$).

8.13. Тоненьке кільце радіусом R і масою m розкрутили до кутової швидкості ω і поставили вертикально на горизонтальну площину з коефіцієнтом тертя μ. Яка частина початкової енергії перейде в теплоту? З якою швидкістю буде рухатися кільце після припинення проковзування? Який шлях пройде кільце до припинення проковзування?. (Відп. $Q/W = 1/2$; $v = \omega R/2$; $S = \omega^2R^2/8\mu g$).

8.14. Моток ниток з радіусом r і моментом інерції відносно осі Mk^2 розмотується під дією сили тяжіння. Вільний кінець нитки закріплено. Знайти прискорення мотка і силу натягу нитки. (Відп. $w = gr^2/\left(r^2 + k^2\right)$, $F = Mgk^2/\left(r^2 + k^2\right)$).

8.15. Однорідна важка мотузка закріплена власними кінцями за горизонтальні площини і охоплює невагомий обруч (див. рис.20). Знайти з яким прискоренням буде падати обруч. (Відп. $w = g/2$).

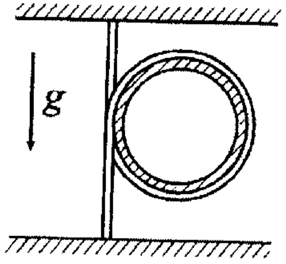


рис.20

8.16. На закріплений циліндр радіусом a намотано n витків мотузки. До одного з кінців мотузка приклали силу T. Доведіть, що, для того, щоб стало можливим проковзування мотузка, до другого кінця треба прикласти силу $T\exp(2\pi n\mu)$ (μ — коефіцієнт тертя між мотузком і циліндром). Знайдіть роботу, яку необхідно здійснити, щоб повернути циліндр на один повний оберт. (Відп. $A = 2\pi aT(\exp(2\pi n\mu) - 1)$).

8.1.17. Кульку масою $M=3$кг піднімають вгору наступним чином. До колеса механічної лебідки, що може обертатися, прикладають силу $F=16$Н в дотичному до колеса напрямку (див. рис.21). При цьому починає обертатися колесо радіусом $R=30$см, що зчеплене з колесом лебідки, та вал радіусом $r=15$см, на якому закріплено мотузок з кулькою. За який час буде піднято кульку, якщо довжина мотузка на початку руху $l=5$м? Відомо, що маси колес однакові $m=0.5$кг, маса валу $m_1=1$кг. Колеса являють собою однорідні диски, вал - однорідний циліндр, центри коліс та валу знаходяться на одній прямій. Розтягненням мотузка та розмірами кульки можна знехтувати. (Відп. $t = \sqrt{\dfrac{l\left[2m+(m_1+2M)(\rho/R)^2\right]}{(\rho/R)\left[F-(\rho/R)Mg\right]}}$ ≈5.2с).

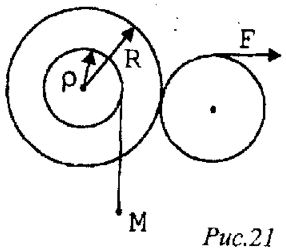


Рис.21

8.18. Довгу дошку масою M поклали на два однакових циліндричних котки масою m. Котки лежать на горизонтальній поверхні. В початковий момент часу система знаходилась у спокої. До дошки приклали в горизонтальному напрямку силу F. Знайти прискорення дошки і величину сили тертя між котками і дошкою. Котки являють собою порожнисті циліндри радіусом R, проковзування між дошкою і котками, котками та поверхнею відсутнє. (Відп. $w = F/(M+m)$, $F_{тр} = mF/2(M+m)$).

8.19. Двері являють собою однорідну прямокутну панель шириною a, висотою b і масою M, яка вставлена у вузьку прямокутну раму, маса котрої також дорівнює M. Двері можуть обертатись навколо вертикальної осі, спрямованої вздовж однієї з її сторін. Де потрібно встановити обмежувач ходу дверей, так щоб при встановлені дверей була відсутня реакція на петлі? (Відп. На відстані $a(4a+5b)/6(a+b)$ від осі).

8.20. Аероплан має два посадкових колеса, кожне діаметром 2 м і моментом інерції 100 кг·м^2. Повна маса аероплану - 10^4 кг. На швидкості 200 км/год аероплан сідає на посадкову смугу. Обидва колеса, нерухомі до посадки, вільно сидять на осі; колеса торкаються поверхні аеродрому одночасно і починають проковзувати. Нехтуючи опором повітря, знайдіть швидкість аероплана, за якої проковзування припиниться. (Відп. v = 196 км/год).

8.21. На шорсткій дошці на відстані l від її правого кінця знаходиться суцільний циліндр (див. рис.22). Дошку починають рухати з прискоренням w_0 вліво. З якою швидкістю відносно дошки буде рухатись центр циліндра в той момент коли він буде знаходитись над краєм дошки? Рух циліндра відносно дошки здійснюється без ковзання. (Відп. $v = 2\sqrt{lw_0/3}$).

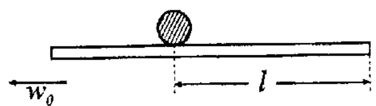


рис.22

8.22. З краю столу, що має висоту H, падає без проковзування кільце радіусом R (див. рис.23). На якій відстані від столу впаде кільце? (Відп. $S = \dfrac{R}{8}\left(3\sqrt{3} + \sqrt{16\dfrac{H}{R} - 5}\right)$).

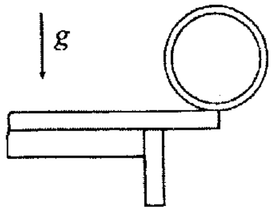


рис.23

8.23. З якої висоти H має скотитись похилим жолобом кулька з радіусом інерції ρ, для того щоб вона змогла без ковзання описати мертву петлю по жолобу радіусом R? Радіусом кульки r по відношенню до R можна знехтувати. (Відп. $H = R(5r^2 + \rho^2)/2r^2$, для суцільної кулі $H = 27R/10$, для порожнистої $H = 17R/6$).

8.24. Однорідний прямокутний паралелепіпед з ребрами $2a$, $2b$, $2c$ обертається з кутовою швидкістю ω біля осі, паралельній головній діагоналі, та проходить через вершину, що не лежить на цій діагоналі. Знайти кінетичну енергію паралелепіпеду. (Відп. $E_к = m\omega^2(b^2c^2 + 7a^2c^2 + 7a^2b^2)/3(a^2 + b^2 + c^2)$).

8.25. Важкий однорідний диск радіусом 20 см обертається навколо власної осі з кутовою швидкістю 300 рад/с. Знайдіть кутову швидкість прецесії під дією сили тяжіння для випадку, коли вісь диску підтримується горизонтальною, при цьому точка опори осі знаходиться на відстані 15 см від центра мас диска. (Відп. $\omega = 0.245$ рад/с).

8.26. Кульку, підвішену на нитці довжиною l (див. рис.24), відхилили на якийсь кут і відпустили. При поверненні кульки в положення рівноваги здійснюється пружний удар кульки зі стрижнем, довжина якого $L > l$. Якою повинна бути довжина нитки, щоб кулька зупинилась після удару? Маса стрижня дорівнює масі кульки. (Відп. $l = L/\sqrt{3}$. Вказівка: використати закони збереження моменту імпульсу і кінетичної енергії).

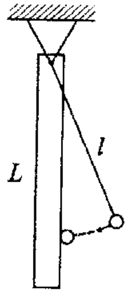


рис.24

8.27. По кульці масою m і радіусом R, що знаходиться на гладенькій горизонтальній площині, швидко вдаряють в горизонтальному напрямку, падаючи при цьому кульці імпульс $\vec{p}$. Висота удару над центром кульки складає $R/2$ (див. рис.25). Знайти: *а*) швидкість центру кульки $\vec{v}_c$ після удару; *б*) кутову швидкість обертання кульки. (Відп. *а*) $\vec{v}_c = \vec{p}/m$; *б*) $\vec{\omega} = 5p\vec{n}/4mR$, $\vec{n}$ - одиничний вектор нормальний до площини малюнка).

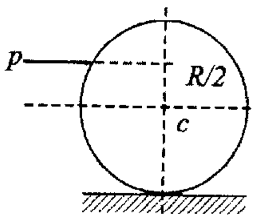


рис.25

8.28. До теорії гри на більярді. Більярдну кулю б'ють горизонтально києм в площині її меридіану. Маса кулі $M = 100$ г, радіус кулі $R = 3$ см, коефіцієнт тертя ковзання між кулею і сукном більярдного столу дорівнює $\mu = 0.6$, імпульс сили, що діє на кулю в момент $t = 0$ дорівнює $P = 2$ Н·с. На якій висоті H_0 над площиною більярдного столу треба зробити удар, щоб відразу ж після удару було "чисте" кочення кулі (без проковзування)? Удар називають "високим", якщо висота H удару $H > H_0$, і "низьким", якщо $H < H_0$. Нехай висота h удару над центром кулі дорівнює $h_1 = 3R/5$, $h_{2,3} = \pm R/5$. Для цих трьох випадків визначте: через скільки часу τ після удару буде мати місце "чисте" кочення кулі, та якою буде швидкість центру мас кулі на цей момент? (Відп. $H_0 = 7R/5 \approx 4.2$ см; $v_1 = 8P/7M \approx 23$ м/с, $\tau_1 = P/7\mu gM \approx 0.5$ с, $v_2 = 6P/7M \approx 18$ м/с, $\tau_2 = P/7\mu gM \approx 0.5$ с, $v_3 = 4P/7M \approx 11.4$ м/с, $\tau_3 = 3P/7\mu gM \approx 1.4$ с).

8.29. Обруч радіусом r вільно скочується з вершини нерухомої циліндричної поверхні радіусом $R > r$. В якій точці поверхні почнеться ковзання обруча? Коефіцієнт тертя між обручем та поверхнею $k = 0.5$. (Відп. Ковзання почнеться на висоті $0.8\,R$ від горизонтального діаметру циліндричної поверхні).

8.30. Знайти висоту H на яку підстрибує обруч радіусом R, що налітає на поріг з горизонтальною швидкістю v (див. рис.26). До зіткнення обруч не обертався, висота порогу h, проковзування відсутнє. Розгляньте випадки *а*) зіткнення з порогом без тертя; *б*) удар з урахуванням тертя. (Відп. *а*) $H_1 = 2v^2h(R-h)^2(2R-h)/gR^4$; *б*) $H_2 = 9H_1/16$).

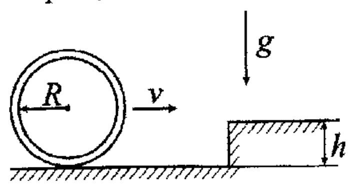


рис.26

8.31. Якою частиною довгої палки треба вдарити, щоб рука не відчула удару? (Відп. На відстані $2l/3$ від руки).

8.32. Олівець довжиною l падає із вертикального положення на гладеньку горизонтальну поверхню (див. рис.27). Визначити швидкість верхнього кінця олівця в

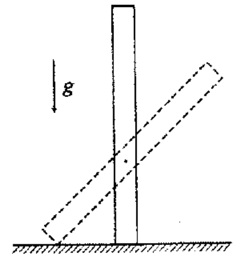


рис.27

момент зіткнення з поверхнею. (Відп. $v = \sqrt{3gl}$).

8.33. Зробіть розумну оцінку порядку величини моменту імпульсу велосипедного колеса ("дорослий" велосипед) якщо швидкість велосипедиста *30* км/год. Який момент сили треба прикласти до руля, щоб повертати його зі швидкістю 1 рад в *0.1* с? (Відп. $L \approx 10$ кг·м²/с, $N \approx 10^2$ н·м).

8.34. В районі Північного полюсу на Землю падає метеорит масою $m = 10^3$ т зі швидкістю $v = 20$ км/с під кутом $\varphi = 45°$ до вертикалі. Оцінити, на який кут α повернеться земна вісь внаслідок зіткнення з метеоритом.

(Відп. $\alpha \approx 5mv\sin\varphi/(2M_3R_3\omega_3) = 1.27\cdot10^{-17}$ рад).

9. ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ

9.1. Гармонічні коливання

Коливання - процеси відхилення від рівноважного стану, що повторюється через однакові проміжки часу. Необхідною умовою виникнення і продовження коливань є дія на тіло, що здійснює коливання, сили, спрямованої до положення стійкої рівноваги тіла. Таку силу називають **повертаючою силою**. Для механічних коливань в якості повертаючої сили виступає: сила потягу, сила тяжіння, сила пружності тощо. ***У випадку, коли модуль повертаючої сили є пропорційним величині зміщення тіла від положення рівноваги x(t), коливання називають*** **гармонічними** . Наслідком цього є зміна зміщення тіла *x(t)* за законом косинуса або синуса:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),\ x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (9.1.1)$$

Час, що витрачається на одне повне коливання, називають **періодом коливань** *T*. Величину, обернену до періоду коливань тіла називають **частотою коливань тіла** $\nu = 1/T$. Іншими фізичними величинами, що характеризують коливальний рух, є: ***амплітуда A***, ***кутова частота*** ω, ***фаза*** $\varphi = \cos\omega t + \varphi_0$, ***початкова фаза*** φ_0, ***час t*** (див.9.1.1).

Амплітуда коливань - максимальне відхилення тіла від положення рівноваги.

Кутова (циклічна) частота $\omega = 2\pi/T$.

Фаза коливань - величина, що стоїть під знаком косинуса або синуса у законі коливального руху тіла.

Початкова фаза - значення фази в момент часу *t=0*.

Час *t* - час, що проходить після початку коливань тіла.

Рівняння, якому задовільняє закон коливального руху (9.1.1), має такий вигляд:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (9.1.2)$$

Рівняння (9.1.2), описує вільні незагасаючі коливання тіла і є основними при розв'язку задач на коливання.

Швидкість та прискорення тіла, що здійснює коливання, можна визначити із закону руху (9.1.1)

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),\ w = \dot{v} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Використовуючи другий закон Ньютона, можемо знайти повертаючу силу, що діє на тіло:

$$F = mw = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_e) = -m\omega^2 x = -kx,$$

де $k = m\omega^2$ - **коефіцієнт жорсткості**, *m*- маса тіла. Знак "-" означає, що напрямок сили *F* протилежний зміщенню. Через коефіцієнт жорсткості період коливань тіла можна можна подати у вигляді:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Кінетична енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання визначається таким чином :

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2\sin(\omega t + \varphi_o)}{2}.$$

Повна механічна енергія тіла, що здійснює коливання, дорівнює:

$$W = E_k + U = \frac{m\omega^2 A^2}{2}.$$

Фізичним маятником ***називають тіло, яке здатне коливатись навколо осі, що не співпадає з його центром мас***. При малих кутах відхилення період коливань фізичного маятника можна обчислювати за формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Im}{mga}},$$

де $\Im$ -момент інерції тіла відносно осі обертання, a - відстань від осі обертання до центру мас тіла.

Вказана модель дозволяє розв'язувати задачі на коливання тіл, розміри яких не є знехтовно малими по відношенню до їх зміщень $x(t)$.

9.1.1. Частка масою m знаходиться в силовому полі, де її потенціальна енергія залежить від координати x як $U(x) = U_0(1-\cos ax)$, U_0 і a — сталі. Знайти період малих коливань частки біля положення рівноваги. Те ж питання для потенціальної енергії виду $U(x) = a/x^2 - b/x$, a і b — сталі. (Відп. $T = 2\pi\sqrt{m/a^2U_0}$, $T = 4\pi a\sqrt{2ma}/b^2$).

9.1.2. Розв'язати попередню задачу для потенціалів а) Морзе $U(x) = D[\exp(-2ax) - 2\exp(-ax)]$ і б) Ленарда-Джонса $U(x) = 4D\left[(a/x)^{12} - (a/x)^6\right]$, де D і a – сталі. (Відп. а) $T = 2\pi\sqrt{m/2Da^2}$; б) $T = \dfrac{\pi}{3\cdot 2^{1/3}}\sqrt{\dfrac{ma^2}{D}}$).

9.1.3. Наведені в задачі **9.1.2** потенціали досить часто використовуються для модельного описання взаємодії атомів у двохатомних молекулах. При цьому глибина потенціальної ями D і частота коливань ω_0 беруться із експериментальних даних про енергію дисоціації і коливальний спектр випромінювання молекули. Використовуючи відповідь до задачі **9.1.2** та взявши характерні дані $D \approx 5$eV, $\omega_0 \approx 5\cdot 10^{14}$с$^{-1}$, $m \approx 5\cdot 10^{-23}$г, оцінити рівновісну відстань між атомами в двохатомній молекулі. (Відп. $x_0 = 6\sqrt{2D/m\omega_0^2} \approx 10^{-8}$ см).

9.1.4. Чому дорівнює період коливань частки масою m, якщо її потенціальна енергія $U(x) = k|x|$, $k > 0$, а повна енергія дорівнює E? (Відп. $T = 4\sqrt{2mE}/k$).

9.1.5. Рух частки являє собою суперпозицію двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливань вздовж вісей x і y: $x = a\cos\omega_1 t$, $y = b\cos(\omega_2 t + \alpha)$. Отримати рівняння траєкторії руху частки для: *а*) $\omega_2 = \omega_1$, і $\alpha \in [0,\pi]$, розглянути окремі випадки: $\alpha = 0$, π, $\pm\pi/2$, $a \neq b$ і $a = b$; *б*) $\omega_2 = 2\omega_1$, $\alpha = 0$. При якому співвідношенні між частотами траєкторія частки буде замкнена? (Відп. *а*) $(y/b)^2 - 2xy\cos\alpha/ab + (x/a)^2 = \sin^2\alpha$ (еліпс); *б*) ділянка параболи $y = b\left[2(x/a)^2 - 1\right]$, $-a \le x \le a$. При $m\omega_1 = n\omega_2$, де m і n — сталі).

9.1.6. Обчислити період малих коливань ареометра, який легенько штовхнули у вертикальному напрямку. Маса ареометра $m = 50$ г, радіус його трубки $r = 3.2$ мм, густина рідини $\rho = 1$ г/см^3. Опором рідини знехтувати. (Відп. $T = \sqrt{4\pi m/\rho g r^2} = 2.5$ с).

9.1.7. В U-подібну трубку залито рідину. Повна довжина стовпчика рідини в трубці дорівнює l. Нехтуючи тертям визначити частоту малих коливань рідини в трубці. (Відп. $\omega = \sqrt{2g/l}$).

9.1.8. Визначити період малих коливань кульки, яку підвішено на нитці довжиною l=*20см*, якщо вона знаходиться в рідині, густина якої в η=*3* рази менша за густину кульки. Опором рідини знехтувати. (Відп. $T = 2\pi\sqrt{\eta l/g(\eta-1)} = 1.1c$).

9.1.9. Уявимо шахту, що пронизує Землю вздовж осі її обертання. Приймаючи Землю за однорідну кулю і нехтуючи опором повітря, знайти: *а*) рівняння руху тіла, що падає в шахту; *б*) час, який знадобиться цьому тілу, щоб досягнути протилежного кінця шахти; в) швидкість тіла в центрі Землі. (Відп. *а*) $\ddot{x} + (g/R)x = 0$, x — відхилення тіла відносно центру Землі, R — її радіус; *б*) $t = \pi\sqrt{R/g} = 42$ хв; в) $V = \sqrt{gR} = 7.9$ км/с).

9.1.10. Покажіть, що частота власних коливань математичного маятника довжиною l дорівнює $\omega = \left(\dfrac{gM_{Гр}}{lM_{Ін}}\right)^{1/2}$, де $M_{Гр}$, $M_{Ін}$—

відповідно гравітаційна та інертна маси (на сьогодні експериментально визначено, що $M_{Гр} = M_{Ін}$ з точністю до $10^{-12.5}$).

9.1.11. Напруженість гравітаційного поля Землі можна визначити, вимірюючи період коливань прецезіонного маятника. Цей прилад можна також використовувати для визначення прискорення тіла у вертикальній площині. Наприклад, в точці, де $g = 9.8$ м/с^2, довжину маятника можна підібрати такою, щоб період дорівнював 1 с. Період такого маятника було виміряно у ліфті, що піднімався зі сталим прискоренням, і виявився рівним 1.25 с. *а*) Покажіть, що період цього маятника наближено буде визначатися формулою $T \approx T_0(1 - w/2g)$, де w — прискорення ліфта ($w > 0$, $w << g$).

9.1.12. Маятниковий годинник встановлено в ліфті, котрий почав рухатись вертикально вгору зі сталим прискоренням $w<g$. На висоті h прискорення ліфта змінило свій напрямок на протилежний, залишившись тим же за модулем. Через який час після початку руху годинник буде показувати вірний час? (Відп. $t = \sqrt{\frac{2h}{w}}\,\frac{\sqrt{1+\eta} - \sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}}$, де $\eta = w/g$).

9.1.13. Тіло масою m впало з висоти h на шальку пружинних терезів. Прилипнувши до шальки, тіло починає здійснювати гармонічні коливання у вертикальному напрямку. Знайти амплітуду коливань та їх енергію. Жорсткість пружини k, масами шальки та пружини можна знехтувати. (Відп. $A = (mg/k)\sqrt{1 + 2hk/mg}$, $W = mgh + m^2 g^2/2k$).

9.1.14. Дошка з тілом, що лежить на ній здійснює горизонтальні гармонічні коливання з амплітудою $A = 10$ см. Знайти коефіцієнт тертя між дошкою та тілом, якщо тіло починає ковзати по дошці, коли її період коливань менший за $T = 1$ с. (Відп. $k = 4\pi^2 A/gT^2 = 0.4$).

9.1.15. Однорідний диск радіусом r здійснює малі коливання навколо горизонтальної осі, перпендикулярної до площини диска. Де розміщена вісь, якщо період коливань диска мінімальний? (Відп. Вісь розміщена на відстані $r/\sqrt{2}$ від центру диска).

9.1.16. Візок спускається з прискоренням $\vec{w}$ з площини, що утворює кут α з горизонтом (див.рис.28). Знайти період малих коливань маятника довжиною l, встановленого на візку. (Відп. $T = 2\pi\left(\frac{l^2}{g^2 + w^2 + 2wg\sin\alpha}\right)^{1/4}$).

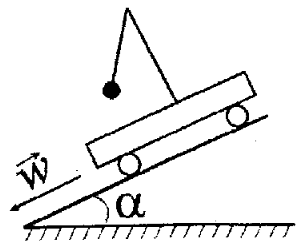


рис.28

9.1.17. Фізичний маятник здійснює малі коливання навколо горизонтальної вісі O з частотою $\omega_1 = 15$ с$^{-1}$. Якщо в положенні рівноваги до нього прикріпити під віссю O на відстані $l = 20$ см від неї невеличке тіло масою $m = 50$ г, то частота коливань становитиме $\omega_2 = 10$ с$^{-1}$. Знайти момент інерції первісного маятника відносно осі O. (Відп. $I = ml^2(\omega_2^2 - g/l)/(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0.8$ гм^2).

9.1.18. Маятник являє собою легку тонкостінну сферичну посудину радіусом R, що повністю заповнена рідиною. Посудину закріплено на легкому жорсткому стрижні (див. рис.29). Відстань між точкою O та центром посудини дорівнює l. У скільки разів зміниться період малих коливань такого маятника після того, як рідина замерзне? В'язкістю рідини та зміною її об'єму при замерзанні знехтувати.

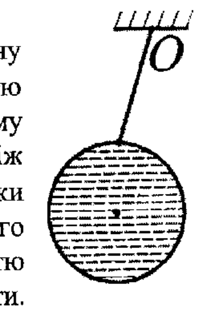


рис.29

(Відп. Збільшиться в $\sqrt{1 + (2/5)(R/l)^2}$ разів. Тут враховано, що рідина до замерзання рухається поступально і система поводиться як математичний маятник).

9.1.19. Тіло обертання з радіусом a, моментом інерції I (відносно геометричної вісі), і масою m качається по внутрішній поверхні циліндра радіусом R, здійснюючи при цьому малі коливання навколо положення рівноваги (див. рис.30). Знайти період цих коливань. Проковзування відсутнє. (Відп. $T = 2\pi\sqrt{\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)\frac{R-a}{g}}$).

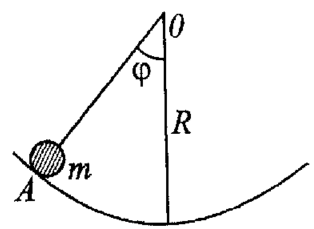


рис.30

9.1.20. Круглий диск підвісили в горизонтальному положенні за допомогою трьох однакових мотузків довжиною l, що знаходяться на рівній відстані один від одного і закріплені на краю диску (таку систему називають трифілярним підвісом). Покажіть, що при малому відхиленні навколо вертикальної осі диск почне здійснювати коливання, період яких такий же, як і у математичного маятника довжиною $l/2$.

9.1.21. Гантель утворено невеличкими кульками, з'єднаними легким стрижнем, що має довжину $2l$. Гантель може ковзати без тертя по сферичній поверхні, що має радіус $R > l$ (див. рис.31). Знайти період коливань гантелі, під час руху: *а)* у площині малюнка; *б)* у вертикальній до малюнка площині. (Відп.

а) $T = 2\pi\sqrt{R/g\sqrt{1-l^2/R^2}}$;

б) $T = 2\pi\sqrt{R\sqrt{1-l^2/R^2}/g}$).

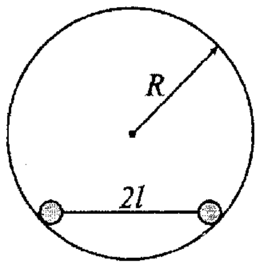


рис.31

9.1.22. До візка, що знаходиться на горизонтальних рейках, підвісили маятник довжиною l, маса котрого M. Візок може рухатись по рейках без тертя. Знайти період малих коливань маятника. Маса візка m, масою коліс знехтувати. (Відп. $T = 2\pi\sqrt{Ml/g(m+M)}$).

9.1.23. Знайти період малих коливань однорідного циліндра радіусом r, що може котитися без тертя по внутрішній циліндричній поверхні радіусом R (див. рис.32). (Відп. $T = 2\pi\sqrt{3(R-r)/2g}$).

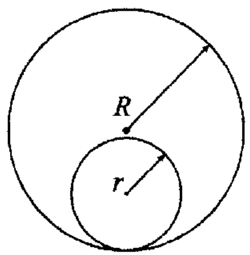


рис.32

9.1.24. Чотири однакові кульки масою m, які утворюють квадрат, з'єднані однаковими пружинами жорсткості k. Одночасно всім чотирьом кулькам надали рівні швидкості, спрямовані до центру квадрата. Через який час після початку руху пружини будуть а)

сильніше за все стиснені?; б)сильніше за все розтягнуті? (Відп. а) $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$; б) $t = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$).

9.1.25. Вісь дверцят шафи, що має ширину b, утворює з вертикаллю кут α. Розглядаючи дверцята як однорідну тонку пластину і нехтуючи тертям, знайти період малих коливань дверцят шафи відносно положення рівноваги. (Відп. $T = 2\pi\sqrt{2b/3g\sin\alpha}$).

9.1.26. Однорідна тверда напівсфера радіусом R опирається на горизонтальну поверхню в точці своєї опуклої сторони. Знайти період малих коливань напівсфери біля положення рівноваги у випадках: а) в місці контакту з горизонтальною поверхнею повністю відсутнє тертя; б) в місці контакту повністю відсутнє проковзування (Відп. а) $T = \sqrt{120g/119R}$; б) $T = \sqrt{15g/26R}$).

9.1.27. Кільце з тонкого дроту здійснює малі коливання, подібно до маятника, навколо горизонтальної осі (див. рис.33 (*а*) і (*б*)). В одному випадку (рис. (*а*)) вісь знаходиться в площині кільця, в іншому (рис. (*б*)) перпендикулярна до неї. Визначити відношення періодів малих

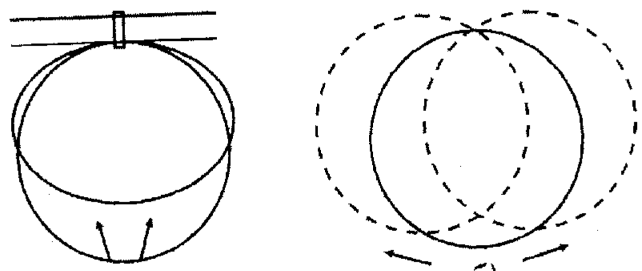

а) *б)*

рис33.

коливань T_1 і T_2 при цих двох видах коливань кільця. (Відп. $T_1/T_2 = \sqrt{3}/2$).

9.1.28. В центрі обруча масою m_1 і радіусом R з допомогою легких спиць закріплено суцільну кулю радіусом $R/2$ і масою $m_2 = 2\,m_1$ (див. рис.34). Обруч висить на гвіздку A. Знайти період малих коливань обруча. (Відп. $T = 2\pi\sqrt{7R/5g}$).

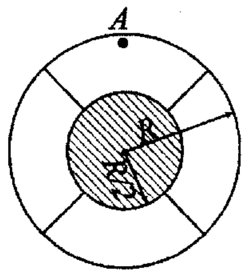


рис.34

9.1.29. Обруч масою M і радіусом R приварено до іншого обруча, що має таку ж масу і радіус $2R$ (див. рис.35). Система перебуває в горизонтальному положенні. Визначити період її малих коливань. (Відп. $T = 2\pi\sqrt{10R/g}$).

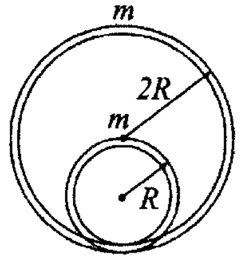


рис.35

9.1.30. Однорідний горизонтальний диск масою m і радіусом r здійснює малі крутильні коливання на дроті, що висить вертикально і закріплений в центрі диску. Дротяне кільце з масою m і радіусом $r/2$ падає на диск і відразу ж приклеюється до нього. Визначте, як змінюється період, амплітуда і енергія коливань в двох різних випадках: *а)* кільце падає на диск в той момент часу, коли він закручений і нерухомий; *б)* диск в момент удару рухається з максимальною швидкістю. (Відп. *а)* $T = \sqrt{3/2}T_0$, амплітуда і енергія не змінюються; *б)* $T = \sqrt{3/2}T_0$, $A = \sqrt{2/3}A_0$, $W = 2/3W_0$; T_0, A_0, W_0 — початкові період, амплітуда і енергія диску).

9.1.31. Круглий диск підвісили в горизонтальному положенні за допомогою трьох однакових мотузків довжиною l, які знаходяться на рівній відстані один від одного і закріплені на краю диску (таку систему називають трифілярним підвісом). Покажіть, що при малому відхиленні навколо вертикальної вісі диск почне здійснювати коливання, період яких такий же, як і у математичного маятника довжиною $l/2$.

9.1.32. Як зміниться хід кишенькового годинника, якщо його покласти на горизонтальний, абсолютно гладенький стіл? Вважати, що вісь крутильного маятника годинника проходить через його центр, а момент інерції годинника I_0 в 500 разів більше за момент інерції маятника I. (Відп. $T'/T = 1/\sqrt{1 + I/I_0} \approx 1 - I/2I_0$, T — період коливань нерухомого годинника, T' - годинника, що лежить на гладенькому горизонтальному столі. Хід годинника прискориться на 0.1%).

9.1.33. Годинникар з метою ознайомлення мешканців Парижу зі своїм новим, точним, на його думку годинником, підвісив його на мотузку до Ейфелевої вежі. Довжина мотузка $L=50$м. Годинник являє собою "ходики". Маса годинника разом з маятником $M = 3$ кг. Довжина маятника "ходиків" $l=10$м, маса вантажу, закріпленого на кінці маятника $m = 150$ г. Оцінити похибку визначення часу цим годинником за добу. Обертанням Землі та опором повітря знехтувати. Коливання вважати малими. (Відп. За добу годинник буде поспішати на $\Delta T \approx Tm/2M \approx 36$ хв., (T = 24 год)).

9.2. Згасаючі коливання

Згасаючими коливаннями ***називають коливання, енергія котрих зменшується з часом.*** Згасання вільних коливань механічної системи обумовлено дисипацією енергії, внаслідок дії на систему сили опору з боку середовища, в якому відбуваються коливання. При цьому сила опору з боку середовища має не потенціальний характер і для випадку малих коливань записується таким чином: $F_{on} = -rv = -r\dot{x}$, де r - коефіцієнт в'язкого тертя, $v = \dot{x}$ - швидкість тіла. Тоді рівняння коливань тіла має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^{\,2}x = 0, \qquad (9.2.1)$$

а його розв'язок відповідно:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi), \qquad (9.2.2)$$

де: $\beta = \frac{r}{2m}$ - коефіцієнт згасання, m - маса тіла, ω_0 - частота власних (без згасання) коливань, x_0 - початкова амплітуда, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота згасаючих коливань.

Із формули (9.2.2) неважко бачити, що коливання будуть згасаючими, при $\omega_0 > \beta$. Коли ж $\beta > \omega_0$ коливань не виникає, має місце аперіодичний рух. Система, після збурення із рівноваги, асимптотично при $t \to \infty$ повертається в стан спокою.

Зауважимо, що сухе тертя, на відміну від в'язкого не залежить від швидкості і приводить до іншого відмінного від (9.2.2) закону згасаючих коливань, що не описується рівнянням (9.2.1).

Для характеристики згасаючих коливань вводять такі поняття як: ***логарифмічний декремент згасання*** λ, ***час релаксації*** τ, ***добротність*** Q.

Логарифмічний декремент згасання - це *натуральний логарифм відношення зміщення x(t) для двох моментів часу, щоі різняться між собою на проміжок часу між двома послідовними проходженнями через положення рівноваги, котрий дорівнює* $T = 2\pi/\omega$

$$\lambda = \ln\frac{x(t_1)}{x(t_1+T)} = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} = \beta T .$$

Часом релаксації τ ***називають проміжок часу, що витрачається на зменшення амплітуди коливань в е разів.*** Виходячи із виразу (9.2.2), неважко знайти $\tau = \beta^{-1}$.

Добротністю Q ***коливальної системи називають величину, що дорівнює добутку*** 2π ***на відношення енергії*** $W(t)$ ***коливань системи в довільний момент часу t до зменшення цієї енергії за проміжок часу від t до t+T, тобто за один період згасаючих коливань***

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t)-W(t+T)} .$$

Враховуючи, що енергія $W(t)$ пропорційна квадрату амплітуди коливань, а та, в свою чергу, пов'язана з логарифмічним декрементом згасання, вираз для Q можна переписати у вигляді:

$$Q = \frac{2\pi}{1-e^{-2\lambda}} .$$

9.2.1. Згасаючі коливання точки здійснюються за законом: $x = a_0 e^{-\beta t}\sin\omega t$. Знайти: *а*) амплітуду, зміщення та швидкість точки в момент $t = 0$; *б*) моменти часу, коли точка досягає крайніх положень. (Відп. *а*) a_0 і $a_0\omega$, *б*) $t_n = [arctg(\omega/\beta) + n\pi]/\omega$, де $n = 0,1,2...$).

9.2.2. Точка здійснює згасаючі коливання, частота яких $\omega = 25$ с$^{-1}$. Знайти коефіцієнт згасання β, якщо в початковий момент швидкість точки дорівнювала нулю, а її зміщення із положення рівноваги в $\eta = 1.02$ рази менша за амплітуду. (Відп. $\beta = \omega\sqrt{\eta^2 - 1} = 5$ с$^{-1}$).

9.2.3. Амплітуда згасаючих коливань зменшилась в e^2 раз за 50 коливань. Чому дорівнюють логарифмічний декремент згасання λ та добротність системи Q? Амплітуда зменшилась e^2 разів за 50 секунд. Чому дорівнює коефіцієнт згасання β? (Відп. λ=1/25, Q=78.5, β =0.04с$^{-1}$).

9.2.4. Відомі частота власних коливань ω_0 і коефіцієнт згасання β. Знайти період власних коливань T та логарифмічний декремент згасання λ. Виразити T через ω_0 і λ. Вичислити відносну похибку $\delta T = (T - T_0)/T_0$, що вноситься в розрахунок, якщо замінити T на власний період коливань $T_0 = 2\pi/\omega_0$, у випадку $\lambda = 0.628$. (Відп. $T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$, $\lambda = \beta t$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4\pi^2}}$, $\delta T = 0.5\%$).

9.2.5. Математичний маятник здійснює коливання в середовищі, для якого логарифмічний декремент згасання $\lambda_0 = 1.5$. Яким буде значення λ, якщо опір середовища збільшити в $n = 2$ рази? В скільки разів слід збільшити опір середовища, для того, щоб коливання маятника стали неможливими? (Відп. $\lambda = n\lambda_0/\sqrt{1+(1-n^2)(\lambda_0/2\pi)^2} = 3.3$, $n_1 = \sqrt{1+(2\pi/\lambda_0)^2} = 4.3$).

9.2.6. Осцилятор, час релаксації якого $\tau = 20$ с, в момент $t = 0$ має початкове зміщення $x_0 = 10$ см. При якому значенні початкової швидкості v_0 це зміщення буде дорівнювати своїй амплітуді? (Відп. $v_0 = -x_0/\tau = -0.5$ см/с).

9.2.7. До нерухомої пружини підвісили тягарець, внаслідок чого вона розтягнулась на $\Delta x = 9.8$ см. З яким періодом буде коливатись тягарець, якщо йому надати невеличкий поштовх у вертикальному напрямку? Логарифмічний декремент згасання $\lambda = 3.1$. (Відп. $T = \sqrt{(4\pi^2 + \lambda^2)\Delta x/g} = 0.7$ с).

9.2.8. Після того як частку змістили із положення рівноваги на відстань $l = 1$ см вона почала здійснювати коливання. Який шлях пройде частка до повної зупинки, якщо логарифмічний декремент згасання $\lambda = 0.02$?
(Відп. $S \approx l\left(1+\exp(-\lambda/2)\right)/\left(1-\exp(-\lambda/2)\right) \approx 2$ м).

9.2.9. Шматочок сиру кинули на терези. Три послідовні крайні положення стрілки терезів були такими: $a_1 = 560$ г, $a_2 = 440$ г, $a_3 = 520$ г. Яка в дійсності маса m шматочка сиру? Чому дорівнює логарифмічний декремент згасання коливань стрілки терезів? (Відп. $a = 488$ г, $\lambda = 0.81$).

9.2.10. Знайти добротність математичного маятника довжиною $l = 50$ см, якщо за проміжок часу $\tau = 5.2$ хв його повна механічна енергія зменшилась в $\eta = 4 \cdot 10^4$ разів.
(Відп. $Q \approx \sqrt{4g\tau^2/l\ln^2\eta - 1}/2 = 1.3 \cdot 10^2$).

9.2.11. Однорідний диск радіусом $R = 13$ см може обертатись навколо горизонтальної осі, що перпендикулярна до його площини і проходить через край диска. Знайти період малих коливань цього диска, якщо логарифмічний декремент згасання $\lambda = 1$. (Відп. $T = \sqrt{(3R/2g)(4\pi^2 + \lambda^2)} = 0.9$ с).

9.2.12. Тонкий однорідний диск масою m і радіусом R, що підвішено в горизонтальному положенні до пружної нитки, здійснює крутильні коливання в рідині. Момент пружних сил з боку нитки $N = -\alpha\varphi$, де α - стала, φ - кут повороту зі стану рівноваги. Сила опору, що діє на одиницю поверхні диска $F = \eta v$, де η — стала, v —

швидкість даного елемента диска відносно рідини. Знайти частоту малих коливань. (Відп. $\omega = \sqrt{2\alpha/mR^2 - (\pi\eta R^2/m)^2}$).

10. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

***Коливання, що відбуваються під дією зовнішньої періодичної сили, називають* вимушенними коливаннями.**

Рівнянням вимушених коливань та закон коливального руху тіла під дією вимушуючої сили мають вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$$

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \tag{10.1}$$

де $A = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}$, $tg\varphi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, де f_0-амплітуда вимушуючої сили, ω_0- частота власних коливань, ω - частота вимушуючої сили.

Із (10.1) неважко знайти, що амплітуда коливань при фіксованих ω_0 та β є функцією від частоти зовнішньої сили ω. У випадку, коли частота вимушуючої сили $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - амплітуда коливань набуває максимального значення:

$$A_{\max} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Таке явище називають **резонансом**, а частоту ω - відповідно **резонансною**.

Зміна з часом повної механічної енергії коливальної системи визначається таким чином:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(E_k + U) = -r\dot{x} + \dot{x}f_0\cos\omega t. \tag{10.2}$$

Проінтегрувавши ліву та праву частину виразу (10.2) за часом від t до $t+T/2$, де T- період вимушенних коливань, отримуємо:

$$\Delta W = W(t + T/2) - W(t) = 0.$$

Тобто, в середньому протягом напівперіоду, енергія коливань не змінюється. Це виступає наслідком того, що енергія зовнішнього джерела повністю витрачається на дисипацію енергії коливальною системою (перетворення механічної енергії в теплоту).

10.1. Знайти вираз для вимушуючої сили, під дією якої осцилятор масою m з коефіцієнтом затухання β зазнає гармонічних коливань за законом $x = a\sin(\omega_0 t - \varphi)$, де ω_0 — частота власних коливань осцилятора. (Відп. $F(t) = 2\beta m a\omega_0 \cos(\omega_0 t - \varphi)$).

10.2. Осцилятор масою m рухається за законом $x = a\sin\omega t$ під дією вимушуючої сили $F_x = F_0\cos\omega t$. Знайти коефіцієнт згасання β осцилятора. (Відп. $\beta = F_0/2ma\omega$).

10.3. Знайти максимальне значення амплітуди зміщення осцилятора, що здійснює усталені коливання під дією вимушуючої гармонічної сили з амплітудою F_0 = *2.5* Н, якщо частота згасаючих коливань осцилятора $\omega = 100$ с$^{-1}$, а коефіцієнт опору (коефіцієнт пропорційності між силою опору та швидкістю) $r = 0.5$ кг/с. (Відп. $a_{max} = F_0/r\omega = 5$ см).

10.4. Тіло, маса якого *1* кг, підвісили на довгій пружині, пружна стала якої $k = 10^3$ н/м а коефіцієнт згасання $\beta = 5\cdot 10^{-2}$ н·с/м. На пружину діє зовнішня сила $F = F_0 \sin\omega t$, де $F_0 = 2.5$ н і ω— частота, що вдвічі більша за власну частоту системи. Чому дорівнює амплітуда результуючого коливання? На скільки фаза зміщення відрізняється від фази зовнішніх сил? (Відп. $A = 8.3\cdot 10^{-4}$ м; $\Delta\varphi = -179.9°$).

10.5. Тіло масою m здійснює коливання на пружині, пружна стала якої k, за законом $x = A_0 cos\omega t$. З моменту часу t_0 на нього починає діяти вздовж пружини постійна сила F. Визначити амплітуду коливань відносно нового положення рівноваги. При якому t_0 ця амплітуда найбільша? Найменша?

(Відп. $A = \sqrt{A_0^2 + \dfrac{F^2}{k^2} - \dfrac{2A_0F}{k}\cos\omega t_0}$, при $t_0 = \pi(2n+1)/\omega$, де n — ціле, амплітуда найбільша; при $t_0 = 2\pi n/\omega$ — найменша).

10.6. Тіло масою M падає без початкової швидкості з висоти H на пружину. Під дією тіла, що впало, пружина стискається на

величину h. Обчислити час стискання пружини, нехтуючи масою пружини та силами тертя.

(Відп. $t = \dfrac{h}{\sqrt{2g(h+H)}}\left[\dfrac{\pi}{2} + arctg\dfrac{h}{2\sqrt{H(h+H)}}\right]$).

10.7. Амплітуда і фаза осцилятора залежить від частоти ω вимушуючої сили. Рівняння, які дають цю залежність, легко записати у вигляді, придатному для всіх осциляторів, що здійснюють вимушені коливання. Покажіть, що: $tg\varphi = \dfrac{\vartheta/\vartheta_0}{\vartheta^2 - 1}$ і $\omega_0^2 A/\alpha_0 = \left[(1-\vartheta^2)^2 + (\vartheta/\vartheta_0)^2\right]^{-1/2}$, де $\vartheta = \omega/\omega_0$ (ω_0— частота власних коливань осцилятора, A— амплітуда його коливань), $\alpha_0 = F_0/m$ і $\vartheta_0 = \omega\tau$ (F_0— амплітуда змушуючої сили, τ — час релаксації, $\tau = m/\beta$, m — маса осцилятора, β— коефіцієнт згасання).

10.8. Через невеличку річку перекинуто довгу пружну дошку. Коли хлопчик стояв на дошці нерухомо, вона прогиналась на l=*0.1м*. Коли ж він пішов по дошці зі швидкістю v=*3.6км/год*., дошка так розгойдалась, що хлопчик впав у воду. Який розмір кроку хлопчика L? (Відп. $L = 2\pi\sqrt{l/g}\,v \approx 63см.$).

10.9. На знехтовно тонкій горизонтальній плиті, що перебуває в стані спокою, знаходиться тіло. Плиту починають коливати по вертикалі з частотою $\omega = \pi c^{-1}$ та амплітудою A=*20см*. Визначити: а) На яку висоту відносно початкового положення підскочить тіло після відриву від плити? б) З якою амплітудою має коливатись плита для того, щоб наступив своєрідний резонанс: тіло, яке підкидається плитою, після кожного зіткнення з плитою збільшує свою висоту підйому? Зіткнення вважати абсолютно пружними. (Відп. а) $H = A + g/2\omega^2 + A^2\omega^2/2g = 0.9м$; б) $A = g\sqrt{\pi^2 n^2 + 1}/\omega^2 = 1м$).

10.10. Тіло масою m, що підвішене на невагомій пружині, здійснює вимушені коливання з амплітудою a та частотою ω. Власна частота коливань системи дорівнює ω_0. Знайти середню за період механічну енергію даного осцилятора. (Відп. $\langle W\rangle = ma^2(\omega^2 + \omega_0^2)/4$).

10.11. Під дією вимушуючої сили $F_x = F_0 \cos \omega t$ система здійснює усталені коливання $x(t) = a(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))$. Визначити: *а*) потужність N вимушуючої сили; *б*) роботу A вимушуючої сили за період коливань; *в*) роботу $A_{тр}$ сили тертя за період коливань. (Відп. *а*) $N = -F_0 \cos\omega t \sin(\omega t - \varphi(\omega))$; *б*) $A = \pi a F_0 \sin\varphi(\omega)$; *в*) $A_{тр} = -A$).

10.12. Під дією зовнішньої вертикальної сили $F = F_0 \cos \omega t$ тіло, що підвішене на пружині, здійснює усталені вимушені коливання за законом $y = a\cos(\omega t - \varphi)$. Знайти роботу сили F за період коливань. (Відп. $A = \pi a F_0 \sin\varphi$).

10.13. Під дією моменту сил $N_z = N_m \cos \omega t$ тіло здійснює вимушені крутильні коливання за законом $\varphi = \varphi_m \cos(\omega t - \alpha)$. Знайти роботу сил тертя, що діють на тіло, за період коливань. (Відп. $A_{TP} = -\pi\varphi_m N_m \sin\alpha$).

10.14. Система здійснює вимушені коливання під дією зовнішньої сили, що змінюється за гармонічним законом. Показати, що в резонансі, при інших рівних умовах, робота зовнішньої сили за період буде максимальною.

10.15. За визначенням добротність осцилятора, що здійснює вимушені коливання, дорівнює $Q = \langle W\rangle\omega/N$, де N — потужність втрат, $\langle W\rangle$ — середня енергія осцилятора, ω — частота зовнішньої сили. Покажіть, що:

$$\langle W\rangle = \langle E_к + U\rangle = \langle E_к\rangle + \langle U\rangle = m\omega^2 A_0^2/4 + m\omega_0^2 A_0^2/4,$$

а $Q = \left[1 + (\omega_0/\omega)^2\right]\omega\tau/2$, де $\tau = m/\beta$, m-маса осцилятора, β - коефіцієнт затухання, A_0 – початкова амплітуда.

11. РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

11.1. Кінематика спеціальної теорії відносності

Основою спеціальної теорії відносності та її складової - релятивістської механіки - складають два постулати, сформульовані А. Ейнштеном.

1. ***Будь-яке фізичне явище відбувається однаково в усіх інерціальних системах відліку за однакових початкових умовах.***

Це означає, що якщо для однієї з інерціальних систем відліку має місце будь-який закон фізики, то в тому ж самому вигляді цей закон проявляється в усіх системах координат, що рухаються відносно наданої прямолінійно та рівномірно.

2. ***Взаємодія між тілами та сигнали, що передають інформацію, не можуть розповсюджуватись з нескінченно великою швидкістю. Існує максимальна (гранична) швидкість розповсюдження взаємодій. Численні експериментальні дані вказують на те, що ця гранична швидкість співпадає зі швидкістю світла в вакуумі, яка, в свою чергу дорівнює $3 \cdot 10^8$ м/с.***

Це твердження називають ще постулатом сталості швидкості світла в вакуумі. Його можна також сформулювати в іншій, еквівалентній формі.

Швидкість світла в вакуумі однакова у всіх інерціальних системах відліку, не залежить від напрямку його поширення, а також від напрямку і швидкості руху джерела та приймача.

Неважко зрозуміти, що наведені формулювання еквівалентні. Дійсно, якби гранична швидкість розповсюдження сигналів і взаємодій змінювалась при переході із однієї системи відліку до іншої, то вона втратила б свій граничний характер: при переході до іншої інерціальної системи можна було б як зменшити, так і збільшити цю швидкість. Таким чином, постулюючи існування граничної швидкості, ми обов'язково повинні вважати її однаковою у всіх інерціальних системах відліку, тобто інваріантною величиною. Той факт, що саме швидкість світла (швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль) співпадає з граничною швидкістю передачі взаємодій, не грає визначальної ролі для спеціальної теорії відносності, але є вельми суттєвою властивістю самого електромагнітного поля.

Іншим важливим поняттям релятивістської механіки є інтервал між подіями:

$$S_{12}=\sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}, \qquad (11.1.1)$$

де c-швидкість світла, x_1, y_1, z_1, t_1 і x_2, y_2, z_2, t_2 - координати та час двох подій, що відбулись в одній інерціальній системі відліку K.

Математичним виразом сталості швидкості світла є інваріантність інтервалу в усіх інерціальних системах відліку, тобто:

$$S'_{12}=S_{12}=inV,$$

де S'_{12} -інтервал між подіями в іншій інерціальній системі K'.

Залежно від знаку S^2_{12} інтервали розрізняють:

$S^2_{12}>0$ - **часоподібний**;

$S^2_{12}<0$ -**простороподібний**;

S^2_{12}-**світлоподібний**.

Релятивістські формули перетворення координат, що випливають із постулатів А. Енштейна, та задовольняють вимозі інваріантності інтервалу (11.1.1), називають **перетвореннями Лоренца**. Вони виражають перехід від інерціальної системи відліку K до інерціальної системи K' (та навпаки), що рухається відносно K зі швидкістю V вздовж осі OX:

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (11.1.2)$$

Диференціюючи формули (11.1.2) за часом легко знайти формули перетворення для швидкості $\vec{v}$ тіла:

$$v'_x=\frac{v_x-V}{1-\frac{u_xV}{c^2}},\ v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{u_xV}{c^2}},\ v'_z=\frac{v_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{u_xV}{c^2}}.$$

Ці формули є формулами **додавання швидкостей в релятивістській кінематиці**.

Час, що відлічується за годинником, що є нерухомим відносно якогось тіла, називають **власним часом** ***цього тіла***. Із інваріантності інтервалу (11.1.1) легко отримати зв'язок між проміжком власного часу $\Delta\tau$ та відповідними йому значеннями часу

t_1, t_2 і швидкістю тіла $\vec{v}(t)$ в системі координат K, відносно якої тіло рухається:

$$\Delta\tau=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt.$$

Власною довжиною тіла ***називають лінійний розмір ℓ_0 тіла, що виміряно в тій системі відліку, відносно якої тіло перебуває в стані спокою***. Довжина ж цього тіла ℓ в системі координат, що рухається відносно тіла зі швидкістю V, дорівнює:

$$\ell=\ell_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

11.1.1. Дві події розділено простороводібним інтервалом. Довести, що: *а*) існує Лоренцівська система відліку, в якій вони одномоментні; *б*) в жодній із Лоренцівських систем відліку вони не відбуваються в одній точці простору.

11.1.2. Дві події розділено часоподібним інтервалом. Довести, що: *а*) існує Лоренцевська система відліку, в якій вони відбуваються в одній точці; *б*) ні в одній із Лоренцевських систем відліку вони не одномоментні.

11.1.3. В двох точках K-системи відліку трапились події, що їх розділяє проміжок часу Δt. Показати, що якщо ці події причинно пов'язані в K-системі (наприклад, постріл та влучення в ціль), то вони причинно пов'язані і в будь-якій іншій інерціальній K'-системі відліку.

11.1.4. В площині xy K-системи відліку рухається частка. Проекції швидкості частки дорівнюють v_x і v_y. Знайти швидкість v' цієї частки в K'-системі, що переміщується зі швидкістю V відносно K-системи в додатному напрямку вздовж осі x.

(Відп. $v'=\left[(v_x-V)^2+v_y{}^2(1-V^2/c^2)\right]^{1/2}/(1-v_xV/c^2)$).

11.1.5. Надано прямокутний трикутник, що має катет $a=5$ м і кут між цим катетом та гіпотенузою $\alpha=30°$. Знайти в системі відліку K', що рухається відносно цього трикутника зі швидкістю $v=0.866c$

вздовж катета a: a) відповідне значення кута α'; $б$) довжину l' гіпотенузи та її відношення до власної довжини.

(Відп. a) $tg\alpha' = tg\alpha/\sqrt{1-\beta^2}$, де $\beta = v/c$, α'=49°;

$б$) $l' = a\sqrt{1-\beta^2+tg^2\alpha} = 3.8$ м, $l'/l_0 = 0.66$).

11.1.6. Знайти власну довжину стрижня, якщо в лабораторній системі відліку його швидкість $v = c/2$, довжина $l = 1$ м і кут між ним та напрямком руху $\theta = 45°$.

(Відп. $l_0 = l\sqrt{\left(1-\beta^2\sin^2\vartheta\right)/\left(1-\beta^2\right)} = 1.08$ м, $\beta = v/c$).

11.1.7. Визначити периметр квадрату зі стороною a, який рухається зі швидкістю $\vec{V} = \vec{e}_x c/2$ вздовж однієї зі своїх сторін. (Відп. 3.73а).

11.1.8. Відносно системи відліку K летить куб зі швидкістю $\vec{v} = v\vec{e}_x$. Ребро куба дорівнює a. Ось OX паралельна одному із ребер куба. Чому дорівнює його об'єм в K системі? Чи буде справедливим отриманий результат для тіла довільної форми? (Відп. $V = a^3\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2}$. Відповідь не залежить від форми тіла, оскільки об'єм тіла можна надати як суму об'ємів елементарних кубиків).

11.1.9. Візок котиться довгим столу зі швидкістю V. За першим візком, в тому ж напрямку зі швидкістю V відносно нього котиться другий візок, за другим у тому ж напрямку і з тією ж швидкістю V відносно нього — третій і т.д. Загальна кількість візків дорівнює n. Знайти швидкість n-го возика в системі відліку, пов'язаній зі столом. Чому дорівнює V_n при $n \to \infty$? Розглянути два випадки: a) ньютонівський; $б$) релятивістський. (Відп. a) $V_n = nv$;

$б$) $V_n = c\left(\dfrac{1-\left[(1-\beta)/(1+\beta)\right]^n}{1+\left[(1-\beta)/(1+\beta)\right]^n}\right)$).

11.1.10. "Поїзд" $A'B'$, довжина якого l=$8.64\cdot10^8$ км у власній системі відліку, рухається зі швидкістю v=$2.4\cdot10^5$ повз "платформу", AB, що має таку ж довжину в своїй системі спокою. В голові B' та хвості A' "поїзда" знаходяться однакові годинники, синхронізовані між собою. Такі ж годинники встановлено на початку A та в кінці B "платформи". В момент, коли голова "поїзда" порівнялась з початком

"платформи" співпадаючи годинники показували час *12*год.*00*хв. Який час покажуть кожен із годинників у момент, коли "хвіст" "поїзда" зрівняється з початком "платформи"? а) з точки зору спостерігача на "платформі"; б) з точки зору спостерігача в "поїзді". (Відп. а) з точки зору спостерігача на "платформі" t_A=12г.36хв., t_B=12г.36хв., $t_{A'}$ =13г., $t_{B'}$ =12г.21.6хв.; б) t_A=12г.36хв., t_B=13г.14.4хв., $t_{A'}$=13г., $t_{B'}$=13г.).

11.1.11. "Поїзд" $A'B'$ рухається повз "платформу" AB (див. попередню задачу). Який час покажуть кожен із годинників у момент, коли голова "поїзду" зрівняється з кінцем "платформи"? а) з точки зору спостерігача на "платформі"; б) з точки зору спостерігача в "поїзді". (Відп. t_A=13г., t_B=13г., $t_{A'}$=13г.14.4хв., $t_{B'}$=12г.36хв.; б) t_A=12г.21.6хв., t_B=13г., $t_{A'}$=12г.36хв., $t_{B'}$=12г.36хв.).

11.1.12. Стрижень пролітає з постійною швидкістю повз риску нерухому в системі відліку K. Час прольоту $\Delta t = 20$ нс в K-системі. В системі ж відліку, пов'язаній зі стрижнем, риска рухається вздовж нього протягом $\Delta t' = 25$ нс. Знайти власну довжину стрижня. (Відп. $l_0 = c\Delta t'\sqrt{1-\left(\Delta t/\Delta t'\right)^2} = 4.5$ м).

11.1.13. Кулю, що летить зі швидкістю V відносно камери та має власну довжину l, сфотографовано з великої відстані. За кулею паралельно до її траєкторії розміщено метрового стрижня, котрий знаходиться в стані спокою відносно камери. Напрямок на камеру утворює кут α з горизонтом. Чому дорівнює довжина кулі, що виміряна за знімком? Яка частина метрового стрижня на знімку буде закрита кулею? (Відп. $l' = \dfrac{l\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-\cos\alpha(v/c)}$).

11.1.14. В K-системі відліку мюон, що рухається зі швидкістю $v = 0.99c$, пролетів від місця свого народження до точки розпаду відстань $l = 3$ км. Визначити: a) власний час життя цього мюона; $б$) відстань, яку пролетів мюон в K-системі відліку "з його точки зору". (Відп. a) $\Delta t_0 = (l/v)\sqrt{1-(v/c)^2} = 1.4$ мкс;

$б$) $l' = l\sqrt{1-(v/c)^2} = 0.42$ км).

11.1.15. Дві нестабільні частки рухаються в K-системі відліку вздовж якоїсь прямої в одному напрямку зі швидкістю $v = 0.99c$. Відстань між ними в цій системі відліку $l = 120$ м. В якийсь момент обидві частки розпались одночасно в системі відліку, що пов'язана з ними. Який проміжок часу між моментами розпаду обох часток спостерігали в K-системі? Яка частка розпалась пізніш в K-системі? (Відп. Частка, що рухалась попереду, розпалась пізніше за час $\Delta t = l\beta/c\left(1-\beta^2\right) = 20$ мкс, $\beta = v/c$).

11.1.16. Космічний корабель прямує до Сонячної системи зі швидкістю $V = 0.6\,c$ відносно Землі. В той самий день, коли корабель знаходиться поблизу планети Тарантуа, на ньому народжується хлопчик Вітя. За Тарантуанським календарем, синхронізованим із Земним, це відбувається 1 жовтня 1987 року космічної ери. В той же час 1 жовтня 1987 року космічної ери на Землі народжується дівчинка Таня. Скільки років будуть мати Вітя (T_B) та Таня (T_T), коли корабель наблизиться до Землі? Швидкістю планети Тарантуа відносно Землі можна знехтувати. Світловий сигнал, посланий із Тарантуа на Землю, повертається на Тарантуа через $2T = 30$ років. (Відп. $T_B = 20$ р, $T_T = 25$ р).

11.1.17. Дві частки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 0.5c$ і $v_2 = 0.75c$ відповідно до лабораторної системи відліку. Знайти: *а*) швидкість, з якою зменшується відстань між частками в лабораторній системі відліку; *б*) відносну швидкість часток. (Відп. *а*) $v = v_1 + v_2 = 1.25c$;
б) $v = \left(v_1 + v_2\right)/\left(1 + v_1 v_2/c^2\right) = 0.91c$).

11.1.18. Частка рухається в K-системі зі швидкістю v під кутом θ до вісі x. Знайти відповідний кут в K'-системі, що переміщується зі швидкістю V відносно K-системи в додатному напрямку її осі x, якщо вісі x і x' обох систем співпадають.
(Відп. $tg\vartheta' = \left(\sqrt{1-\beta^2}\sin\vartheta\right)/\left(\cos\vartheta - V/v\right), \beta = V/c$).

11.1.19. Космонавт в стані невагомості "пливе" зі швидкістю $v' = 5$ км/год. усередині ракети перпендикулярно до напрямку її руху. Чому дорівнює ця складова v швидкості космонавта для спостерігача, що знаходиться на Землі, якщо швидкість ракети $V = 1.8\ 10^8$м/с ("фотонна" ракета)? (Відп. $v = v'\left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2} = 4$ км/год).

11.1.20. Один із супутників Юпітера Іо обертається навколо нього по орбіті радіусом $4.21\cdot10^8$ м з середнім періодом обертання 42.5 годин. Рьомер звернув увагу, що цей період регулярно змінюється протягом року, а періодичність цих змін — біля одного року. Максимальне відхилення періоду обертання від середньої величини дорівнювало 15 с і повторювалося приблизно через 6 місяців. Рух Юпітера по орбіті не враховуйте. Оцініть відстань, яку проходить Земля за один період обертання Іо навколо Юпітера (Відп. $l \approx 4.5\cdot10^9$ м). Використайте попередні результати і визначте швидкість світла. Визначте час, що накопичується за наступні 6 місяців уявного запізнення затемнень Іо і доведіть, що це якраз той час, за який світло проходить діаметр орбіти Землі.

11.1.21. Власний середній час τ життя мюона приблизно дорівнює $2\cdot10^{-6}$ с. Уявимо, що потужний потік мюонів, які утворилися, на певній висоті в атмосфері, рухається вниз зі швидкістю $v = 0.99c$. Число зіткнень в атмосфері на їх шляху незначне. Виходячи з того, що поверхні Землі досягає тільки 1% від числа мюонів, що утворилися, оцініть їх початкову висоту (у власній системі відліку потоку мюонів їх кількість через час t визначається рівнянням $N(t) = N(0)\exp(-t/\tau)$). (Відп. $H_0 \sim 20$ км).

11.1.22. Тахіонами називають гіпотетичні частки, швидкість яких перевищує швидкість світла c. Припустимо, що джерело тахіонів випромінює частки зі сталою швидкістю $u=1.5c$. Тахіоний сигнал послано спостерігачу, який віддаляється від джерела зі сталою швидкістю $V=0.5c$. В момент отримання сигналу спостерігач надсилає тахіону відповідь, знаходячись при цьому на відстані $L=30$км від джерела. Через який час Δt прийде відповідь від спостерігача? Чи можливо за допомогою тахіонів потрапити в минуле? Якщо так, то при яких u? (Відп. $\Delta t = L\left[\frac{1}{u} + \frac{1-uV/c^2}{u-V}\right] \approx 0.92\cdot10^{-5}c$, за допомогою тахіонів можна потрапити в минуле, якщо їх швидкість $u > c^2\left(1+\sqrt{1-V^2/c^2}\right)/V \approx 3.73c$).

11.2. Динаміка спеціальної теорії відносності

Динаміка спеціальної теорії відносності базується на так званому **релятивістському рівнянні динаміки**:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}\,, \qquad (11.2.1)$$

де $\vec{P} = \dfrac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, m_0-маса спокою тіла, тобто маса, що виміряна в системі відліку, відносно якої тіло знаходиться в стані спокою, $\vec{v}$ - швидкість тіла, $\vec{F}$ - сила або рівнодійна сил, що діють на тіло.

Величину $\vec{P}$ називають **релятивістським імпульсом**. Легко помітити, що для випадку малих швидкостей $v \ll c$ релятивістський імпульс перетворюється в суто класичний.

Прискорення, що надається тілу силою $\vec{F}$ легко отримати із виразу (11.2.1)

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{m}\left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{F}\vec{v}\right)\right]\sqrt{1-v^2/c^2}\,.$$

Із наведеного виразу видно, що в релятивістській механіці, на відміну від класичної, загально прискорення тіла не співпадає за напрямком з силою, що обумовлює це прискорення.

Повна енергія тіла, що рухається вільно, являє собою суму двох доданків; енергії спокою m_0c^2 та кінетичної енергії тіла T:

$$E = m_0c^2 + T\,. \qquad (11.2.2)$$

Повна енергія тіла також виражається через імпульс та масу спокою:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}\,. \qquad (11.2.3)$$

Підставивши в (11.2.3) вираз для $\vec{P}$, отримуємо ще одну формулу для E, а порівнявши (11.2.2) і (11.2.3) зв'язок між імпульсом та кінетичною енергією T:

$$E = \frac{m_0c^2}{1-v^2/c^2}\,,\quad Pc = \sqrt{T(T+2mc^2)}\,.$$

11.2.1. Яку кількість енергії (на одиницю маси) необхідно витратити, щоб надати космічному кораблю швидкість $v = 0.98\,c$? В початковий момент корабель знаходився в спокої, опір відсутній. (Відп. $\Delta E/m = \left(1/\sqrt{1-(v/c)^2} - 1\right)c^2 = 3.6\cdot 10^{17}$ Дж/кг).

11.2.2. Чому при $V = c$ перетворення Лоренца втрачають зміст?

11.2.3. Частка масою m в момент $t = 0$ починає рухатись під дією сталої сили $\vec{F}$. Знайти швидкість частки і пройдений нею шлях залежно від часу t.

(Відп. $v = Fct/\sqrt{m^2c^2 + F^2t^2}$, $l = \sqrt{\left(mc^2/F\right)^2 + c^2t^2} - mc^2/F$).

11.2.4. Релятивістська частка з імпульсом p і повною енергією E рухається вздовж осі x K-системи відліку. Показати, що в K' системі, яка рухається з постійною швидкістю V відносно K-системи в додатньому напрямку її осі x, імпульс і повна енергія частки визначаються за формулами ($\beta = V/c$):

$$p'_x = \left(p_x - EV/c^2\right)/\sqrt{1-\beta^2}\,,\quad E' = \left(E - p_xV\right)/\sqrt{1-\beta^2}\,.$$

11.2.5. Виходячи з релятивістського рівняння динаміки частки визначити: *а)* в яких випадках прискорення частки співпадає за напрямком з діючою на неї силою $\vec{F}$?; *б)* коефіцієнти пропорційності між силою $\vec{F}$ і прискоренням $\vec{w}$, коли $\vec{F}\perp\vec{v}$ і $\vec{F} \parallel \vec{v}$, де $\vec{v}$ — швидкість частки. (Відп. *а)* В двох випадках: $\vec{F} \parallel \vec{v}$ і $\vec{F}\perp\vec{v}$; *б)* $\vec{F}_\perp = m\vec{w}/\sqrt{1-\beta^2}$, $\vec{F}_{\parallel} = m\vec{w}/\left(1-\beta^2\right)^{3/2}$, $\beta = v/c$).

11.2.6. Електрон починає прискорюватись в однорідному електричному полі, напруженість котрого спрямована вздовж осі x. Намалювати якісно графіки залежності від x: *а)* повної E і кінетичної T енергій електрона; *б)* імпульсу електрона; *в)* швидкості електрона. (Відп. див. рис.36).

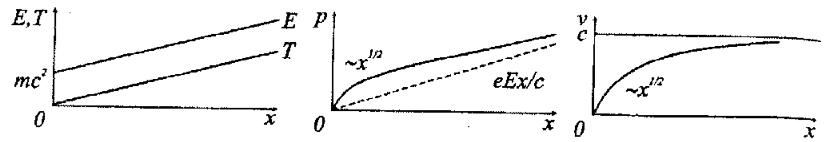


рис.36

11.2.7. Релятивістська частка з масою m і кінетичною енергією T налітає на частку з такою ж масою, що знаходиться в стані спокою. Знайти масу та швидкість складової частки, що утворюється внаслідок зіткнення.

(Відп. $M = \sqrt{2m\left(T + 2mc^2\right)}/c$, $V = c\sqrt{T/\left(T + 2mc^2\right)}$).

11.2.8. Розглядається γ промінь з енергією квантів E, що падає на нерухомий відносно лабораторії протон. Покажіть, що швидкість V центру мас системи відносно лабораторії визначається формулою $\dfrac{V}{c} = \dfrac{E}{E + M_p c^2}$, де M_p — маса протона.

11.2.9. Ядро Fe^{57} випромінює γ квант, енергія якого 14 кеВ. Чому дорівнює імпульс віддачі ядра? Чи є він релятивістським? (Відп. $p \approx 7.5 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с, імпульс не є релятивістським).

11.2.10. По якій траєкторії буде рухатись релятивістська частка масою m і зарядом q, яка влітає зі швидкістю v в поперечне магнітне поле з індукцією $\vec{B} = const$? (Відп. Частка рухається по колу радіуса $R = mv/qB\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$).

11.2.11. Обчисліть радіус кривизни траєкторії протона з кінетичною енергією 1 ГеВ у поперечному магнітному полі з індукцією $2 \cdot 10^5$Гс (частки таких величезних енергій зустрічаються в космічних променях) (Відп. $R = 2.84$ м).

11.2.12. Фотон являє собою частку, енергія якої дорівнює $h\nu$, де h — стала Планка, ν — частота світла. Чому дорівнює імпульс фотона? Використовуючи формули перетворення енергії і імпульсу, (див. задачу **11.2.4**) отримати вираз для енергії фотона в системі відліку K' якщо відомо, що частота світла в K системі відліку дорівнює c і світло розповсюджується вздовж осі x.

(Відп. $p = h\nu/c$, $\nu' = \nu\left(1 - V/c\right)^{1/2}/\left(1 + V/c\right)^{1/2}$, де V — швидкість K' відносно K).

11.2.13. Ракета стартує з поверхні Землі до Зіркової системи Проксіма-Центавра, відстань до якої складає чотири світлових роки, зі сталою швидкістю $v = \sqrt{0.9999}c$. Скільки років ΔT за Земним годинником тривав би такий політ? Із розрахунку якої тривалості подорожі $\Delta\tau$ слід запасти продовольство та інше спорядження? Який має бути запас кінетичної енергії T ракети, якщо її маса 10т? Один світловий рік складає $9.46 \cdot 10^{12}$км. (Відп. ΔT=4 роки, $\Delta\tau$=0.5 місяця, $T \approx 2.5 \cdot 10^{16}$кВт·г).

11.2.14. Зорельот стартує з поверхні планети з прискоренням $w = 20$м/с^2. За який час зорельот набуде швидкості $v = \sqrt{0.9999}c$ в системі відліку, пов'язаній з зорельотом, та нерухомій системі відліку? (Відп. В системі відліку, пов'язаній з зорельотом $\Delta\tau = \dfrac{c}{2w}\ln\left|\dfrac{1 + v/c}{1 - v/c}\right| = 2.5$ роки, в нерухомій системі відліку

$$\Delta T = \frac{v}{w\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 47.5 \text{ років}).$$

11.2.15. Чи може внаслідок анігіляції електрона ($q = -e$) та позитрона ($q = +e$) утворитись один фотон? Відповідь обгрунтуйте за допомогою законів збереження енергії та імпульсу. (Відп. Не може).

11.2.16. Чи може вільний електрон випромінити або поглинути фотон? (Відп. Не може).

11.2.17. Фотон утворює з електроном, що перебуває в стані спокою, замкнену систему. Яку мінімальну енергію повинен мати фотон для народження електрон-позитронної пари? (Відп. $E_{\min} = 4m_0c^2 \approx 2 \cdot 10^6 eV$, де m_0=0.91·10^{-27}г - маса спокою електрона).

11.2.18. Релятивістська частка масою m_1 зазнала пружне зіткнення з нерухомою часткою m_2. Знайти максимальний кут, на який може відхилитись налітаюча частка внаслідок такого зіткнення. (Відп. $\sin\vartheta_{max} = m_2/m_1$).

11.2.19. Тіло рухається з релятивістською швидкістю v крізь газ, в одиниці об'єму якого міститься N молекул масою m, що повільно рухаються. Знайти тиск з боку газу на елемент поверхні тіла, нормальний до його швидкості, якщо молекули газу пружно відбиваються від поверхні тіла. (Відп. $p = 2mv^2N/\left(1 - v^2/c^2\right)$).

ЛІТЕРАТУРА

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.:Высшая школа, 1986.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.1. Механика. –М.:Наука, 1979.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнэс М. Фейнмановские лекции по физике. Ч. 1,2. – М.:Мир, 1976.
4. Александров Н.В., Яшкин А.Я. Курс общей физики. Механика. – М.:Просвещение, 1978.
5. Федорченко А.М. Теоретическая физика. Классическая механика. – К.: Высшая школа, 1983.
6. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин Н.Н. Классическая электродинамика. – М.:Наука,1985.
7. Жирнов Н.И. Классическая механика. – М.: Просвещение, 1980.
8. Приложение к журналу «Квант» №2/1997 (под редакцией Зильбермана А.Р. и Черноуцана А.И.). – М.: Бюро «Квантум» 1997.
9. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. – М.:Наука, 1990.
10. Кухлинг Х. Справочник по физике. – М.: Мир, 1982.
11. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.:Наука, 1979.
12. Воробъев И.И., Зубков П.И. и др. Задачи по физике.-М.:Наука, 1979.
13. Бабаджан Е.И., Гервидс В.И. и др. Сборник качественних вопросов и задач по общей физике. – М.:Наука, 1990.
14. Мелєдин Г.В. Физика в задачах. – М.:Наука, 1985.
15. Яковлев И.А.. Сборник задач по общему курсу физики. Механика. – М.:Наука, 1977.
16. Козел С.М., Рашба Э.И., Славатинский С.А. Сборник задач по физике. – М.:Наука, 1987.
17. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.:Наука, 1970.
18. Лайтман А., Пресс В. и др. Сборник задач по теории относительности и гравитации. – М.:Мир, 1979.

Навчальне видання

Олег Васильович Кравцов
Андрій Борисович Шевченко
Дмитро Віталійович Філін

МЕХАНІКА
Закони і задачі

Навчальний посібник

Видання здійснене в авторській редакції

Оригінал-макет підготовлений А. Б. Шевченком

ПП О. Власюк
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 1114 від 12.11.2002

Підписано до друку 24.11 2006. Формат 29,7× 42 1/4.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 5,54.
Наклад 95 прим. Зам. № 03-11

ПП О. Власюк
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 1114 від 12.11.2002
21021, м. Вінниця а/с 1883