

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“Київський політехнічний інститут”
Фізико-технічний інститут

*Серія “На допомогу студенту”
Загальна фізика*

О. В. Гомонай, О. В. Кравцов

Задачі з загальної фізики
Хвилі, квантова фізика, будова матерії

Практикум

Київ 2015

Гомонай О.В., Кравцов О.В. Задачі з загальної фізики: хвилі, квантова фізика, будова матерії. Практикум для студентів спеціальності 6.040301 “Прикладна математика” – К.: НТУУ “КПІ”, 2015.– 78 с. – (Серія “На допомогу студенту”. Загальна фізика)

*Гриф надано Вченою радою Фізико-технічного інституту НТУУ “КПІ”
Протокол N 5 від 28 травня 2015 р.*

Відповідальний редактор: Т. В. Литвинова, к.т.н., доц.
Рецензент: О.П. Кобушкін, д.ф.-м.н.

Електронне видання навчального призначення

ГОМОНАЙ Олена Василівна
КРАВЦОВ Олег Васильович

Задачі з загальної фізики. Хвилі, квантова фізика та будова матерії

Практикум

*Комп'ютерна верстка
у вид. системі LaTeX-2 ϵ*

© ФТІ НТУУ “КПІ”, 2015

Зміст

1	Хвильовий рух електромагнітного поля	5
§1	Загальні характеристики хвильового руху	5
§2	Плоскі і сферичні хвилі	6
§3	Електромагнітні хвилі та їх властивості	7
§3.1	Електромагнітні хвилі в вакуумі	7
§3.2	Поляризація електромагнітних хвиль	9
§3.3	Випромінювання електромагнітних хвиль	10
§3.4	Релятивістський ефект Доплера	11
§4	Електромагнітні хвилі в речовині	12
2	Звукові хвилі	15
§1	Характеристики і властивості звуку	15
§2	Акустичний ефект Доплера	16
3	Ефекти додавання хвиль	18
§1	Биття	18
§2	Стоячі хвилі	18
§3	Хвильові пакети	20
§4	Когерентність та інтерференція	22
§5	Діапазони електромагнітного випромінювання	23
4	Оптичне випромінювання	26
§1	Джерела оптичного випромінювання	26
§2	Характеристики видимого світла	28
§3	Інтерференція світла	31
§4	Дифракція світла. Голографія	34
§5	Дисперсія світла	38
5	Основи квантової фізики	40
§1	Хвильові властивості часток	40
§2	Основні положення квантової механіки	43
§2.1	Оператори	43
§2.2	Постулати квантової механіки	44

§2.3	Комутатори	45
§3	Рівняння Шрьодінгера	47
§4	Будова атому	51
6	Будова матерії і фізика макросистем	54
§1	Основи термодинаміки	54
§2	Статистична фізика	57
§3	Елементи ядерної фізики	64
	Відповіді	68
	Додатки	69
	Екзаменаційні питання	69
	Питання для самоперевірки	71
	Лекційні вправи	74

Розділ 1

Хвильовий рух електромагнітного поля

§1 Загальні характеристики хвильового руху

Загальний вигляд **хвильового рівняння** (рівняння д'Аламбера) за відсутності згасання та дисперсії:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Стала v визначає фазову швидкість хвилі.

Для хвилі, що розповсюджується вздовж осі x :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

загальний розв'язок такого рівняння:

$$\psi(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Для хвилі, що розповсюджується вздовж осі x за наявності згасання

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial \psi}{\partial x} + \gamma^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (1.2)$$

Розв'язок (1.2)

$$\psi(x, t) = a_0 e^{-\gamma x} \exp[-i(\omega t - kx)], \quad (1.3)$$

де a_0 – стала, γ – коефіцієнт згасання хвилі, ω – циклічна частота ($= 2\pi\nu = 2\pi/T$), ν – лінійна частота, T – період, $k \equiv 2\pi/\lambda$ – хвильове число, λ – довжина хвилі. Величина $a_0 e^{-\gamma x}$ – амплітуда хвилі.

Для розв'язку (1.3) мають місце такі співвідношення: $\omega = vk$, $\lambda = vT = 2\pi v/\omega$.

Інтенсивність хвилі (1.3) $I = I_0 e^{-\kappa x}$, де $\kappa = 2\gamma$ – коефіцієнт поглинання.

§2 Плоскі і сферичні хвилі

Плоска гармонічна хвиля:

$$\psi(\vec{r}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (1.4)$$

де \vec{r} – радіус-вектор точки хвильової поверхні, $\vec{k} = \vec{n}k$ – хвильовий вектор, \vec{n} – одиничний вектор нормалі до хвильової поверхні.

Сталу a_0 називають амплітудою, а $\phi \equiv \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ – фазою хвилі.

Сферична монохроматична хвиля:

$$\psi(r, t) = \frac{a_0}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \quad (1.5)$$

де r – відстань від точкового джерела. Амплітуда сферичної хвилі a_0/r , фаза $\phi = \omega t - kr$.

Сферична монохроматична хвиля із згасанням:

$$\psi(r, t) = \frac{a_0 e^{-\gamma r}}{r} e^{-i(\omega t - kr)}. \quad (1.6)$$

Інтенсивність такої хвилі

$$I = I_0 \frac{e^{-\kappa r}}{r^2}.$$

Задачі

1. Записати рівняння хвилі, що випромінюється 1) точковим джерелом (сферична хвиля); 2) нескінченно довгою ниткою (циліндрична хвиля). Записати хвильове рівняння в кожному з цих випадків.
2. Показати, що хвильове рівняння не інваріантне відносно перетворень Галілея і інваріантне відносно перетворень Лоренца.
3. Переконалися, що нижченаведені вирази є розв'язками хвильового рівняння (1.1). Які хвилі описують ці вирази?

$$a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \frac{a_0}{r} e^{-i(\omega t - kr)}, \quad \frac{\sin kr}{r} \cos \omega t, \quad \frac{\cos kr}{r} \cos \omega t.$$

4. Показати, що функція (1.3) є розв'язком хвильового рівняння (1.2) за наявності згасання.
5. Виходячи з визначення та властивостей хвильової поверхні показати, що вираз $\psi_1(\vec{r}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ описує плоску, а вираз $\psi_2(r, t) = (a_0/r) e^{-i(\omega t - kr)}$ – сферичну хвилі.
6. Показати, що похідні по декартовим координатам від функцій із задачі 3 є розв'язками хвильового рівняння.

7. Плоска гармонічна хвиля з частотою ω розповсюджується зі швидкістю v в напрямку, який утворює кути α, β, γ з осями x, y, z . Знайти різницю фаз коливань в точках $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.
8. Показати, що будь-яка диференційовна функція виду $f(t + \alpha x)$, де α – стала, є розв'язком хвильового рівняння. Який фізичний зміст має стала α ?
9. Знайти хвильовий вектор \vec{k} і швидкість хвилі, яка має вид $\xi = a \cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)$.
10. Перед штормом берегова охорона бачить на морі хвилі, відстань між гребнями яких становить $L = 8,6$ м. Відстань між гребнем та впадиною (по вертикалі) становить $h = 4,6$ м. Між ударами хвиль о стіну станції проходить $\Delta t = 6,2$ с. Знайти амплітуду, частоту та величину хвильового вектора, записати вираз для хвилі (в числах). Знайти швидкість руху частинок води в вертикальному напрямку.
11. Точкове ізотропне джерело випромінює звукові коливання з частотою $\nu = 1,45$ кГц. На відстані $r_0 = 5,0$ м від джерела амплітуда зміщення точок середовища становить $a_0 = 50$ мкм, а в точці А, що знаходиться на відстані $r = 10,0$ м від джерела, амплітуда зміщення в $\eta = 3$ разів менша за a_0 . Знайти коефіцієнт згасання хвилі γ , амплітуду коливань швидкості часток середовища в точці А.
12. В однорідному середовищі розповсюджується пружна плоска хвиля виду $\psi = ae^{-\gamma x} \cos(\omega t - kx)$, де a, ω, k – сталі, $\gamma = 0,42$ м $^{-1}$. Знайти різницю фаз коливань в точках, де амплітуди зміщення часток середовища відрізняються одна від одної на $\eta = 1\%$. Довжина хвилі $\lambda = 50$ см.
13. Рівняння плоскої звукової хвилі має вигляд $\psi = a \cos(\omega t - kx)$, де $a = 30$ мкм $\omega = 600$ с $^{-1}$ $k = 2,7$ м $^{-1}$. Знайти відношення амплітуди зміщення часток до довжини хвилі, амплітуду швидкості коливань часток середовища, фазову швидкість розповсюдження хвилі.
14. Швидкість звуку в повітрі 330 м/с, а у воді – 1500 м/с. Знайти кут падіння, за якого звукова хвиля повністю відбивається від поверхні води (граничний кут).

§3 Електромагнітні хвилі та їх властивості

§3.1 Електромагнітні хвилі в вакуумі

Рівняння електромагнітної хвилі в вакуумі:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.7)$$

Плоска монохроматична хвиля:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})], \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \quad (1.8)$$

Тут \vec{E}_0, \vec{B}_0 – сталі вектори, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Поперечність електромагнітних хвиль . Якщо \vec{n} – одиничний вектор нормалі до хвильової поверхні, то $\vec{n} \times \vec{E} = c\vec{B}$, $c\vec{n} \times \vec{B} = -\vec{E}$.

Вектор Пойнтинга : $\vec{P} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = 2cU_E \vec{n} = 2cU_B \vec{n} = cU\vec{n}$, де введено густину енергії електромагнітної хвилі:

$$U = U_E + U_B = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2$$

Задачі

15. В вакуумі розповсюджується плоска ЕМХ з частотою $\nu = 100$ МГц та амплітудою електричної складової 50 мВ/м. Знайти середнє за період коливань значення модуля густини струму зміщення та густини потоку енергії.
16. Знайти середнє значення вектора Пойнтинга $\langle \vec{P} \rangle$ в плоскій електромагнітній хвилі $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, якщо хвиля розповсюджується в вакуумі.
17. Плоский повітряний конденсатор має обкладинки у формі дисків з радіусом $R = 6$ см. Конденсатор підключено до змінної напруги з частотою $\omega = 1000$ с⁻¹. Знайти відношення амплітудних значень електричної і магнітної енергії всередині конденсатора.
18. Плоска поляризована електромагнітна хвиля з коловою частотою $\omega = 10^6$ с⁻¹ падає на рамку з провідника (зі сторони ребра), причому вектор індукції хвилі спрямований перпендикулярно до площини рамки. Лінійні розміри рамки малі порівняно з довжиною хвилі. Площа рамки $S = 100$ см², середня густина потоку енергії в хвилі $\langle P \rangle = 1$ Вт/м². Знайти максимальну ЕРС індукції, що наводиться в контурі.
19. Для плоскої електромагнітної хвилі (1.8)
 - довести поперечність;
 - перевірити співвідношення $\vec{n} \times \vec{E} = c\vec{B}$, $c\vec{n} \times \vec{B} = -\vec{E}$;
 - отримати співвідношення $\vec{P} = 2cU_E \vec{n} = 2cU_B \vec{n} = cU\vec{n}$.
20. Отримати, виходячи з рівнянь Максвелла, хвильове рівняння для векторного потенціала \vec{A} . Прийняти калібрування Кулона ($\text{div} \vec{A} = 0$).

§3.2 Поляризація електромагнітних хвиль

Хвилю називають *поляризованою* якщо вектор \vec{E} в певній точці простору при проходженні хвилі змінюється за детермінованим (не хаотичним) законом. Площина поляризації \vec{E}, \vec{k} .

Лінійно поляризована хвиля: $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$

Еліптично-поляризована хвиля:

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1 \quad (1.9)$$

Закон Малюса : інтенсивність хвилі, що пройшла через поляризатор: $I = I_0 \cos^2 \varphi$, де I_0 – інтенсивність хвилі на вході в поляризатор, φ – кут між вектором поляризації хвилі і віссю поляризатора.

Степінь поляризації :

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{\text{pol}}}{I_{\text{pol}} + I_{\text{chaot}}}, \quad (1.10)$$

I_{\max}, I_{\min} – максимальна і мінімальна інтенсивності, що спостерігаються на виході з поляризатора при повороті його осі, $I_{\text{pol}}, I_{\text{chaot}}$ – інтенсивність поляризованої і неполяризованої компоненти світла на вході в поляризатор.

Задачі

21. Визначити характер поляризації плоскої електромагнітної хвилі, якщо проекції вектора \vec{E} визначаються такими рівняннями:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & E_x = E \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E \sin(\omega t - kz); \\ \text{b)} \quad & E_x = E \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}\right); \\ \text{c)} \quad & E_x = E \cos(\omega t - kz), \quad E_y = E \cos(\omega t - kz + \pi). \end{aligned}$$

22. Площини поляризації двох монохроматичних хвиль

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_1), \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha_2)$$

утворюють певний кут. Знайти поляризацію результуючої хвилі, якщо $E_{01} = E_{02}$, $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi/2$.

23. Природне світло інтенсивності I_0 падає на систему із трьох поляризаторів. Кут між площинами пропускання першого та другого поляризаторів дорівнює $+45^\circ$, другого та третього теж $+45^\circ$. Знайти інтенсивність світла на виході із системи. Як зміниться відповідь, якщо другий та третій поляризатори поміняти місцями?
24. Природне світло інтенсивності I_0 падає на систему із трьох поляризаторів. Кут між площинами пропускання першого та другого поляризаторів дорівнює $+45^\circ$, другого та третього -45° . Знайти інтенсивність світла на виході із системи. Як зміниться відповідь, якщо другий та третій поляризатори поміняти місцями?
25. Степінь поляризації частково поляризованого світла дорівнює $P=0,25$. Знайти відношення інтенсивності поляризованої складової цього світла до інтенсивності природної (неполяризованої) складової.
26. На шляху частково поляризованого світла розмістили поляризатор. При повороті поляризатора на кут $\phi = 60^\circ$ із положення, що відповідає максимуму пропускання, інтенсивність світла, яке пройшло через поляризатор, зменшилась втричі. Знайти ступінь поляризації світла, яке падало на поляризатор.

§3.3 Випромінювання електромагнітних хвиль

Заряд q , що рухається з прискоренням \vec{a} , випромінює в тілесний кут 4π *потужність*

$$P = 20 \frac{q^2 a^2}{c^2} \text{ Вт} \quad (\text{в системі СІ}). \quad (1.11)$$

Середня за період потужність випромінювання диполя, дипольний момент якого залежить від часу як $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$:

$$\langle P \rangle = 10 \frac{p_0^2 \omega^4}{c^2} \text{ Вт}. \quad (1.12)$$

В хвильовій зоні диполя (див. Рис.)

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} \frac{\sin \theta}{R} \cos(\omega t - kR). \quad (1.13)$$

Діпазон частот, які використовуються в радіомовленні: $\Delta\nu = 10 \text{ кГц} \div 275 \text{ ГГц}$ ($\Delta\lambda = 30 \text{ км} \div 1,09 \text{ мм}$).

Задачі

27. Знайти максимальну густину потоку випромінювання в площині рамки зі струмом $I = I_0 \cos \omega t$ на відстані $r = 200 \text{ м}$ від неї. Прийняти $I_0 = 10 \text{ А}$, площу рамки $S = 100 \text{ см}^2$, частоту $\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$.

28. Знайти середню потужність випромінювання P електрона, який коливається за гармонічним законом з амплітудою $a = 0,10$ нм та коловою частотою $\omega = 6,5 \cdot 10^{14}$ с $^{-1}$.
29. Нерелятивістська заряджена частка (маса m , заряд q) рухається в поперечному однорідному магнітному полі з індукцією B . Знайти закон зменшення кінетичної енергії частки за рахунок випромінювання. За який час енергія частки зменшиться в e разів? Оцінити цей час для протона та електрона, прийняти $B = 1,0$ Тл.
30. Нерелятивістська заряджена частка (маса m , заряд q) рухається в полі нерухомого точкового заряду Q по коловій орбіті радіуса R . Знайти потужність випромінювання.

§3.4 Релятивістський ефект Доплера

Оптичний ефект Доплера:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \alpha}. \quad (1.14)$$

Поздовжний ефект Доплера ($\alpha = 0$):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Поперечний ефект Доплера ($\alpha = \pi/2$):

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Задачі

31. В К-системі відліку плоска електромагнітна хвиля з частотою ω падає нормально на дзеркало, яке рухається йому назустріч з релятивістською швидкістю V . Знайти частоту відбитої хвилі (користуючись формулою Доплера). Спростити вираз для випадку малих швидкостей.
32. Монохроматична плоска електромагнітна хвиля з густиною енергії W_0 падає перпендикулярно на плоске дзеркало, що рухається зі швидкістю \vec{v} назустріч хвилі. Знайти густину енергії W та імпульсу \vec{g} відбитої хвилі, якщо хвиля відбивається повністю. Вказівка: Перейти в систему відліку, яка зв'язана з дзеркалом і знайти параметри відбитої хвилі. після цього повернутися в лабораторну систему відліку і скористатися формулами перетворення полів.

33. Користуючись законом перетворення хвильового 4-вектора, визначити зміну частоти (ефект Доплера) та напрямок швидкості світла (аберація світла) при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Дослідити отримані формули в граничному випадку $v \ll c$, де v – модуль швидкості відносного руху в ІСВ.
34. Радіолокатор працює на довжині хвилі $\lambda = 50$ см. Визначити швидкість літака, який наближається до локатора, якщо частота биття між сигналом передатчика та сигналом, відбитим від літака, дорівнює $\Delta\nu = 1,00$ кГц. Биття спостерігаються в місці розташування локатора.
35. Виходячи з твердження, що фаза хвилі $\omega t - kx$ є інваріантом, тобто, не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої, визначити, як перетворюються при цьому частота ω та хвильовий вектор k . Розглянути одновимірний випадок.
36. З якою швидкістю віддаляється від нас певна туманність, якщо лінія водню $\lambda_0 = 434$ нм (для нерухомого джерела) в її спектрі зміщена в “червоний” бік на $\delta\lambda = 130$ нм?
37. З якою швидкістю повинен рухатися автомобіль, щоб водій сприйняв червоне світло світлофора ($\lambda_1 = 0,70$ мкм) як зелене ($\lambda_2 = 0,55$ мкм)?
38. Вздовж прямої в одному напрямку рухаються спостерігач зі швидкістю $v_1 = c/2$ і попереду нього джерело монохроматичного світла зі швидкістю $v_2 = 3c/4$. Власна частота світла $\nu_0 = 1,5 \cdot 10^{14}$ Гц. Знайти частоту світла, яку зафіксує спостерігач. (Відп. $\nu = \nu_0 \sqrt{3/7} = 10^{14}$ Гц).

§4 Електромагнітні хвилі в речовині

Рівняння д’Аламбера для електромагнітних хвиль в речовині:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} = 0. \quad (1.15)$$

Фазова швидкість (швидкість переносу фази):

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

При $\mu \approx 1$, $v_{\text{фаз}} = c/\sqrt{\varepsilon}$.

Абсолютний показник заломлення речовини

$$n = \frac{c}{v_{\text{фаз}}} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Середовище з більшим показником заломлення n називають оптично більш щільним.

Оптична довжина $\ell_{\text{опт}} = n\ell$.

Дисперсія електромагнітних хвиль : залежність показника заломлення, і, як наслідок, фазової швидкості від частоти: $n(\omega)$, $v_{\text{фаз}}(\omega)$.

Частотна дисперсія: $\varepsilon(\omega)$, просторова дисперсія: $\varepsilon(\omega, \vec{k})$.

Нормальна дисперсія: $dn/d\omega > 0$, аномальна дисперсія: $dn/d\omega < 0$.

Групова швидкість (швидкість переносу енергії):

В однорідному середовищі

$$u = \frac{d\omega}{dk}, \quad (1.16)$$

В загальному випадку

$$\vec{u} = \vec{\nabla}_k \omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \vec{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \vec{e}_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \vec{e}_z. \quad (1.17)$$

При переході з вакуума в середовище частота хвилі не змінюється: $\nu_{\text{вак}} = \nu_{\text{сер}} = \nu$, а довжина хвилі змінюється: $\lambda_{\text{вак}} = cT_0$, $\lambda_{\text{сер}} = v_{\text{фаз}}T_0$.

В середовищі вектор Пойнтинга $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$, густина енергії

$$U = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}). \quad (1.18)$$

В електромагнітній хвилі $\varepsilon E_m^2 \propto H_m^2$, отже, $H_m \propto nE_m$ і інтенсивність $I \propto nE_m^2$.

Задачі

39. Отримати, виходячи з рівнянь Максвелла, хвильове рівняння (1.15) для електромагнітних хвиль в ізотропному діелектрику ($\varepsilon, \mu = \text{const}$) і показати, що функції (1.8) є його розв'язками. Знайти $|\vec{k}|$.
40. Електромагнітна хвиля з частотою 3,0 МГц переходить з вакуума в немагнітне середовище з діелектричною проникністю 4. Знайти зміну її довжини хвилі.
41. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на плоскопаралельний шар завтовшки ℓ . Шар немагнітний, а його діелектрична проникність спадає за експоненціальним законом від ϵ_1 на передній поверхні до ϵ_2 на задній. Знайти час розповсюдження заданої фази через цей шар.

42. Плоска ЕМХ з частотою $\nu = 10$ МГц розповсюджується в середовищі з малою провідністю $\sigma = 10$ мСм/м та діелектричною проникністю $\varepsilon = 9$. Знайти відношення амплітуд густини струмів провідності та струмів зміщення.
43. Показник заломлення в іоносфері дорівнює 0,90 для радіохвиль з частотою 100 МГц. Знайти концентрацію електронів, а також фазову та групову швидкості для цих радіохвиль.
44. Вільний електрон знаходиться в полі монохроматичної світлової хвилі з інтенсивністю $I = 150$ Вт/м² та частотою $\omega = 3,4 \times 10^{15}$ с⁻¹. Знайти: а) амплітуду коливань електрона та порівняти її із довжиною світлової хвилі; б) амплітуду швидкості електрона та порівняти її із швидкістю світла в вакуумі; діелектричну проникність середовища, якщо концентрація електронів становить $n = 10^{19}$ електронів/см³.
45. Електромагнітна хвиля із частотою ω розповсюджується в розрідженій плазмі. Концентрація вільних електронів в плазмі дорівнює n_0 . Нехтуючи взаємодією хвилі з іонами плазми знайти залежність діелектричної проникності плазми від частоти та фазової швидкості від довжини хвилі λ в плазмі.
46. В певних випадках діелектрична проникність середовища є від'ємною або комплексною величиною. Відповідно, показник заломлення такого середовища – чисто уявна $n' = i\kappa$ або комплексна $n' = n + i\kappa$ величина. Записати для таких випадків рівняння плоскої хвилі та пояснити фізичний зміст таких показників заломлення.
47. Чи може показник заломлення бути від'ємним? Якщо так, то що це означає? Якщо ні, то яким фізичним принципам це протирічить?
48. Показник заломлення середовища для світла із довжинами хвиль 509, 534, і 589 нм дорівнює, відповідно 1,647, 1,640 і 1,630. обчислити фазову та групову швидкості світла в околі $\lambda = 534$ нм.
49. Відомо, що в розрідженій плазмі для радіохвиль із довжиною хвилі $\lambda > \lambda_0 = 0,55$ м спостерігається повне внутрішнє відбивання. Знайти концентрацію вільних електронів в такій плазмі.
50. Плоска монохроматична (довжина хвилі λ) хвиля падає під кутом α із вакууму на плоский шар товщини $d \gg \lambda$ речовини з показником заломлення $n = -1$ (метаматеріал, “ліве” середовище). Знайти напрямок хвильового вектора і вектора Пойнтинга в метаматеріалі і за його межами.
51. Плоский шар метаматеріалу з показником заломлення $n = -1$ може використовуватися як ідеальна лінза (не створює аберацій). Знайти зображення в такій “лінзі” точкового джерела, розташованого в вакуумі на відстані a від границі шару. Розглянути випадки $a \ll d$ і $a > d$. Чому дорівнює фокусна відстань? Яке зображення створює така “лінза” (дійсне, уявне)?

Розділ 2

Звукові хвилі

§1 Характеристики і властивості звуку

Розрізняють такі діапазони звукових частот:

- звук – $20 \text{ Гц} \div 20 \text{ кГц}$,
- інфразвук – менше 20 Гц ,
- ультразвук – більше 20 кГц ,
- гіперзвук – $10^9 \div 10^{13} \text{ Гц}$.

Біофізичний закон Вебера-Фехнера (Weber-Fechner, 1834 р.): сприйняття сигналу людиною пропорційно до логарифму інтенсивності зовнішнього впливу. Для гучності звуку та сприйняття світла оком

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_{\min}}, \quad (\text{децибел}), \quad (2.1)$$

де I – інтенсивність зовнішнього впливу, I_{\min} – гранична інтенсивність впливу відповідного сигналу (тобто, сигнал з $I < I_{\min}$ не сприймається).

Формулу (2.1) застосовують для визначення відносної інтенсивності різних величин. Зокрема, для звуку $I_{\min} = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ (границя чутливості “середньостатистичного” вуха), для світлових хвиль $I_{\min} = 10^{-16} \text{ Вт/м}^2$ (границя чутливості “середньостатистичного” ока). Верхня границя чутливості (больовий поріг) для вуха $I_{\max} = 1 \text{ Вт/м}^2$, для ока $I_{\max} = 10^{-4} \text{ Вт/м}^2$. Цікаво, що діапазон інтенсивностей в децибелах для вуха та для ока співпадають: $\Delta L_{\text{світло}}(\text{око}) = \Delta L_{\text{звук}}(\text{вухо}) = 120 \text{ дБ}$.

Стівенс (Stevens, 1950 р.) узагальнив закон Вебера-Фехнера для інших сенсорних реакцій людини, таких, як біль, тактильні відчуття (тиск) та інші, ввівши замість

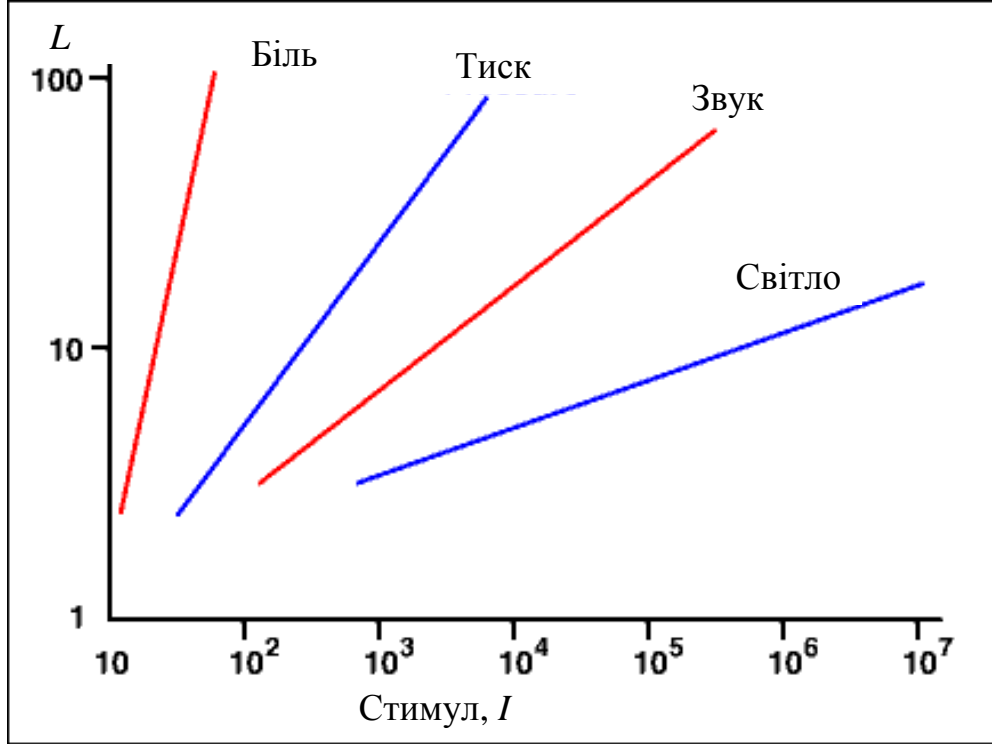


Рис. 2.1: Біофізичний закон Стівенса: залежність реакції мозку від інтенсивності стимула для різних зовнішніх чинників.

логарифмічного степеневий зв'язок між реакцією (L) та інтенсивністю стимулу I (див. Рис. 2.1):

$$L = k(I - I_{\min})^a, \quad (2.2)$$

де показник a різний для різних чинників.

Швидкість звуку в твердому тілі для поздовжніх (\parallel) та поперечних хвиль (\perp)

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2.3)$$

де E – модуль Юнга, G – модуль зсуву ρ – густина матеріалу.

§2 Акустичний ефект Допплера

- а) Якщо швидкість джерела звуку $v_s = 0$, а швидкість приймача $v_d = \pm v_0$, то частота звуку ω_d , яку реєструє приймач

$$\omega_d = \omega_s \left(1 - \frac{\pm v_0}{v_{\text{зв}}} \right).$$

Тут ω_s – частота звуку, на якій працює джерело, $v_{зв}$ – швидкість звуку.

б) Якщо $v_s = \pm v_0$, а $v_d = 0$, то

$$\omega_s = \omega_d \left(1 - \frac{\pm v_0}{v_{зв}} \right).$$

с) Якщо $v_s \neq 0$, а $v_d \neq 0$, то

$$\omega_d = \omega_s \frac{v_{зв} - v_d}{v_{зв} - v_s}.$$

Задачі

52. Плоска звукова хвиля розповсюджується вздовж осі x . Коефіцієнт згасання хвилі $0,0230 \text{ м}^{-1}$. В точці $x = 0$ рівень шуму 60 дБ. Знайти рівень шуму в точці з координатою $x = 50 \text{ м}$ та координату точки, в якій звук вже не чути.
53. На відстані 20 м від точкового ізотропного джерела звуку рівень шуму становить 30 дБ. Знайти рівень шуму на відстані 10 м від джерела та відстань, на якій звук не чути.
54. Локомотив рухається зі швидкістю 120 км/год. Він дає сигнал протягом 5,0 с. Знайти тривалість сигналу для спостерігача, який нерухомо стоїть біля дороги, якщо локомотив а) віддаляється б) наближається до нього. Швидкість звуку в повітрі 330 м/с.
55. Джерело звукових коливань частоти 1 кГц рухається перпендикулярно до стінки із швидкістю 0,17 м/с. На цій же прямій розташовані два нерухомі приймачі по різні боки від джерела. Який з приймачів реєструє биття і яка їх частота? Швидкість звуку 340 м/с.
56. На осі знаходиться приймач та джерело звукових хвиль з частотою 2 кГц. Джерело коливається вздовж осі за гармонічним законом з коловою частотою ω та амплітудою 50 см. При якому значенні ω ширина інтервалу, що сприймається нерухомим приймачем, становить 200 Гц? Швидкість звуку 340 м/с.
57. Джерело звукових хвиль з власною частотою $\nu_0 = 1800 \text{ Гц}$ рухається рівномірно вздовж прямої, що знаходиться на відстані $l = 250 \text{ м}$ від нерухомого спостерігача. Швидкість джерела становить $\eta = 0,80$ від швидкості звуку. Знайти: а) частоту звуку, яку сприймає спостерігач в момент часу, коли джерело знаходиться навпроти нього; б) відстань між спостерігачем та джерелом в той момент, коли частота $\nu = \nu_0$.
58. Показати, що для малої величини стимулу $|I - I_0| \ll I$ закон Стівенса співпадає з законом Вебера-Фехнера. Знайти відповідне значення показника a .

Розділ 3

Ефекти додавання хвиль

§1 Биття

Для двох плоских хвиль

$$\begin{aligned}\psi_1(x, t) &= a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) \\ \psi_2(x, t) &= a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)\end{aligned}\tag{3.1}$$

з близькими частотами, $\omega_1 \approx \omega_2 \gg |\omega_1 - \omega_2|$.

Інтенсивність сумарних коливань в точці з $x = 0$:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Omega t + \Delta\varphi),\tag{3.2}$$

де $\Omega \equiv |\omega_2 - \omega_1|$ – частота биття, $\Delta\varphi \equiv |\varphi_2 - \varphi_1|$.

§2 Стоячі хвилі

Біжучі хвилі:

$$\psi_{\rightarrow}(x, t) = a_0 \exp[-i(\omega t - kx)], \quad \psi_{\leftarrow}(x, t) = a_0 \exp[-i(\omega t + kx - \theta)].\tag{3.3}$$

Стояча хвиля з амплітудою $a(x) = a_0 (e^{ikx} + e^{-ikx+i\theta})$:

$$\psi_{\text{stand}}(x, t) = \psi_{\rightarrow}(x, t) + \psi_{\leftarrow}(x, t) = a(x)e^{-i\omega t}\tag{3.4}$$

Координати вузлів за умови нерухомих кінців струни/стержня:

$$x_n = \frac{\pi n}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad x_n = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, \dots\tag{3.5}$$

Можливі значення довжин стоячих хвиль $\lambda_n = 2L/n$. Спектр частот (v – швидкість хвилі):

$$\omega_n = \frac{\pi v}{L} n.$$

Стоячі електромагнітні хвилі:

$$\begin{aligned} E_{\text{stand}} &= 2E_0 \cos\left(kx - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right), \\ B_{\text{stand}} &= \frac{2E_0}{c} \sin\left(kx - \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Задачі

59. Отримати формулу (3.2) для інтенсивності при битті.
60. Отримати спектр частот і довжин хвиль стоячих хвиль для стержня довжини L , який закріплено з одного кінця (другий кінець вільний). Граничні умови вибрати у вигляді:

$$a(0) = 0, \quad \left. \frac{da(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (3.7)$$

Визначити положення вузлів і пучностей.

61. Органна труба створює звук, в якому присутня третя і п'ята гармоніки з частотами 1100 Гц і 1833 Гц відповідно. Знайти частоту першої гармоніки. Прийняти до уваги, що один з кінців труби закритий (закріплений кінець), а інший відкритий (вільний кінець) і скористатися граничними умовами (3.7) задачі 60.
62. Флейта має довжину $L = 89,2$ см, перша гармоніка відповідає частоті 196 Гц. Знайти швидкість розповсюдження біжучої хвилі, яка створює цю гармоніку (тобто, стоячу хвилю). Вважати, що граничні умови на кінцях флейти відповідають відкритим (вільним) кінцям:

$$\left. \frac{da(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{da(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0.$$

63. Джерело звукових хвиль з власною частотою $\nu_0 = 1700$ Гц і приймач знаходяться в одній точці. В момент часу $t = 0$ джерело починає віддалятися від приймача зі сталим прискоренням $a = 10$ м/с². Знайти частоту коливань, яку сприймає нерухомий приймач через $t = 10$ с після початку руху джерела. Швидкість звуку в повітрі 330 м/с.
64. Нерухомий спостерігач сприймає звукові коливання від двох камертонів, один з яких наближається, а інший віддаляється з тією ж швидкістю. Спостерігач чує биття з частотою 2 Гц. Знайти швидкість кожного з камертонів, якщо їх частота коливань 680 Гц, швидкість звуку в повітрі 340 м/с.

65. В однорідному пружному середовищі встановилася плоска стояча хвиля виду $\psi = a \cos kx \cos \omega t$. Знайти залежність від x величин ψ та $\partial\psi/\partial x$ в моменти часу $t = 0$ і $t = T/2$, де T – період коливань. Знайти залежність від x швидкостей точок середовища в момент $t = T/4$.
66. В вакуумі вздовж осі x встановилася стояча ЕМХ з електричною складовою $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos kx \cos \omega t$. Знайти магнітну складову хвилі. Намалювати приблизний розподіл електричної та магнітної складової хвилі в моменти часу $t=0$, $t = T/4$ та $t = T/2$, де T – період коливань.

§3 Хвильові пакети

Зв'язок з частотою і хвильовим вектором групової швидкості

$$u = \frac{d\omega}{dk}, \quad (3.8)$$

фазової швидкості:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}. \quad (3.9)$$

Зв'язок між фазовою і груповою швидкостями задається формулою Релея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (3.10)$$

або

$$u = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}. \quad (3.11)$$

Задачі

67. Відома залежність показника заломлення середовища від довжини хвилі випромінювання: $n(\lambda)$. Знайти співвідношення між фазовою $v_{\text{фаз}}$ та груповою $v_{\text{груп}}$ швидкістю для цього середовища.
68. Знайти залежність між фазовою $v_{\text{фаз}}$ та груповою $v_{\text{груп}}$ швидкістю для таких законів дисперсії:

$$a) \quad v_{\text{фаз}} \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad b) \quad v_{\text{фаз}} \propto k; \quad c) \quad v_{\text{фаз}} \propto \frac{1}{\omega^2}.$$

Тут введені такі позначення: λ - довжина хвилі, k - хвильовий вектор і ω - частота.

69. Виходячи із визначення групової швидкості u отримати формулу Релея $u = v - \lambda dv/d\lambda$. Показати, що значення u в околі $\lambda = \lambda'$ дорівнює довжині відрізка v' , який відсікає дотична до кривої $v(\lambda)$ в точці λ' .

70. Плоский світловий імпульс розповсюджується в середовищі із законом дисперсії:

$$v_{\text{фаз}} = a + b\lambda,$$

де a та b – додатні сталі, а λ – довжина хвилі. Показати, що в такому середовищі форма довільного світлового імпульсу відновлюється через час $\tau = 1/b$.

71. Плоский світловий імпульс розповсюджується в середовищі без дисперсії. В момент часу $t = 0$

$$E(x, 0) = \int f(k) e^{-ikx} \frac{dk}{2\pi},$$

де $f(k)$ – відома функція, а k – хвильове число. Показати, що форма імпульсу з часом не змінюється, тобто, $E(x, t) = E(x - vt)$, де v – фазова швидкість хвилі.

72. Для утримання світлових імпульсів використовують речовину, в якій показник заломлення залежить від частоти як

$$n(\omega) = \frac{n_0(\omega - \omega_0)}{[(\omega - \omega_0)^2 + \kappa^2]^2}.$$

Тут n_0 , ω_0 , κ – сталі. При якій частоті швидкість світла в в такій речовині мінімальна? Знайти це значення.

73. Кадр телевізійного зображення містить приблизно $5 \cdot 10^5$ точок (625 рядків по $4/3 \cdot 625$ елементів в рядку), швидкість передачі зображення 25 кадрів за секунду. Несуча частота хвилі лежить в діапазоні: від 47 до 862 МГц. Оцінити мінімальний частотний інтервал між несучими частотами різних каналів і максимальну можливу кількість каналів.
74. Оцінити мінімальний розмір об'єкта, який видно в оптичному мікроскопі (довжина хвилі 0,5 мкм), якщо кутовий розмір променя на предметному склі становить $\theta = 5^\circ$? Як зміниться відповідь при застосуванні іммерсійного мікроскопа (об'єкт розміщений в рідині з високим ($n=2$) показником заломлення)?
75. Радіолокатор пеленгує сигнали, що переносяться хвилями з довжиною $\lambda = 1$ м. Оцінити точність (в м), з якою цей локатор визначає місцезнаходження предмета на відстані $\ell = 100$ км.
76. Світловий промінь (довжина хвилі 0,6 мкм) проходить крізь отвір діаметром 0,5 мм. Оцінити кутовий розмір пучка за отвором.
77. Оцінити радіус когерентності сонячних променів. Кутовий радіус Сонця 0,01 рад, довжина хвилі видимого світла лежить в діапазоні 400-700 нм.
78. Лазер випромінює світло з довжиною хвилі 680 нм, добротність лазера (тобто, відношення частоти сигналу до ширини спектрального інтервалу) становить 10^{12} . Оцінити довжину когерентності.

79. Оцінити довжину когерентності радіохвиль, які створюються антеною з добротністю (тобто, відношенням частоти сигналу до ширини спектрального інтервалу) 10^{10} і порівняти з довжиною хвилі. Несуча частота 50 МГц.
80. На збірну лінзу діаметром 10 см падає паралельний пучок когерентного лазерного випромінювання. Довжина хвилі 680 нм, діаметр пучка 0,5 см. Оцінити діаметр плями, що утворюється в фокусі ($F = 25$ см) лінзи. Як зміниться відповідь, якщо за лазером (але перед лінзою) поставити розсівну короткофокусну лінзу діаметром 10 см?
81. Довести співвідношення невизначеності $\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi$.
82. Довести співвідношення невизначеності $\Delta k\Delta x \approx 2\pi$.

§4 Когерентність та інтерференція

Вимірювана інтенсивність

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [a(t)]^2 dt. \quad (3.12)$$

Для суми гармонічних коливань

$$a(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \quad (3.13)$$

вимірювана інтенсивність

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \langle I_{12} \rangle, \quad (3.14)$$

де

$$\langle I_{12} \rangle = A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (3.15)$$

$$\langle I_j \rangle = A_j^2/2, \quad j = 1, 2.$$

Інтерференцію хвиль називають *конструктивною*, якщо $\langle I \rangle > \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle$ (тобто, $\langle I_{12} \rangle > 0$).

Інтерференцію хвиль називають *деструктивною*, якщо $\langle I \rangle < \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle$ (тобто, $\langle I_{12} \rangle < 0$).

Інтерференція відсутня, якщо $\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle$, або тобто, $\langle I_{12} \rangle = 0$.

Час когерентності $\tau_{\text{coh}} = 2\pi/\Delta\omega$. Довжина когерентності $\ell_{\text{coh}} = c\tau_{\text{coh}}$. Радіус когерентності $r_{\text{coh}} = 2\pi/\Delta k_{\perp}$.

§5 Діапазони електромагнітного випромінювання

Оптичний діапазон електромагнітних хвиль:

- ультрафіолетове випромінювання: $\lambda = 0,01 \div 0,40$ мкм, $\nu = (30 \div 7,5) \cdot 10^{15}$ Гц;
- оптичне випромінювання (світло): $\lambda = 0,40 \div 0,76$ мкм, $\nu = (7,5 \div 0,4) \cdot 10^{15}$ Гц;
- інфрачервоне випромінювання: $\lambda = 0,76$ мкм \div 1 мм, $\nu = 0,4 \cdot 10^{15} \div 3 \cdot 10^{11}$ Гц.

Для порівняння: радіодіапазон: $\nu = 10^4 \div 275 \cdot 10^9$ Гц, звук $\nu = 0 \div 10^{13}$ Гц.

Задачі

83. Для гармонічного коливання $a(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$ показати, що $\langle I \rangle = A^2/2$ Час осереднення $\Delta t \gg 2\pi/\omega$.
84. Для суми гармонічних коливань (3.13) вивести формулу (3.14).
85. Миттєві значення двох майже монохроматичних хвиль в точці $x = 0$ задані законами

$$a_1(t) = A_1(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad a_2(t) = A_2(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_2), \quad (3.16)$$

де ω_0 – несуча частота, а амплітуди $A_1(t)$ і $A_2(t)$ майже не змінюються протягом періоду $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Знайти вид інтерференційного доданку (3.15) після усереднення по періоду T_0 .

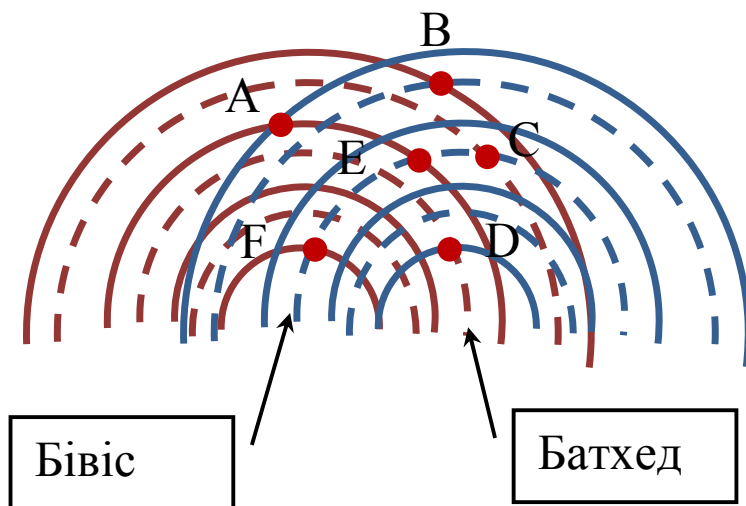


Рис. 3.1: Інтерференція хвиль на воді, створених водяними комахами. Суцільні лінії – максимуми, штрихові лінії – мінімуми.

86. Два однакові водяні жучки, Бівіс і Батхед (Рис. 3.1) створюють когерентні хвилі на поверхні води, завдяки швидкому руху ніжок. Картина хвиль схематично зображена на рисунку, максимумами – суцільні лінії, мінімумами – штриховані лінії. Вказати, в яких із зазначених на рисунку точках спостерігається конструктивна, а в яких деструктивна інтерференція.

87. Амплітуди майже монохроматичних хвиль із задачі 85 задані такими функціями часу:

$$A_1(t) = A_{10} \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau], \\ 0, & t < 0, t > \tau, \end{cases} \quad A_2(t) = A_{20} \begin{cases} 1, & t \in [t_0, \tau + t_0], \\ 0, & t < t_0, t > \tau + t_0, \end{cases} \quad (3.17)$$

де A_{10} , A_{20} – сталі, $t_0 > 0$. Знайти залежність інтерференційного доданку (3.15) від часу вимірювання інтенсивності Δt і визначити час когерентності τ_{coh} хвиль.

88. Знайти середню за часом енергію коливання, яке отримано в результаті накладання двох хвиль $\psi_1 = a \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})$ та $\psi_2 = a \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \phi)$ в точці \vec{r}_* , де ϕ – стала. Визначити, за яких значень ϕ інтерференція буде а) конструктивною, б) деструктивною, в) відсутня.

89. Довжина хвилі лазерного випромінювання становить 630 нм, довжина когерентності 1 км. Оцінити добротність лазера (тобто, відношення несучої частоти до ширини смуги випромінювання).

90. Синхротронне випромінювання, яке отримують в дослідках на CNRS, має енергію 11 кеВ (жорсткий рентген) і використовується для спостереження інтерференції з використанням об'єктів, з поперечним (відносно напрямку хвилі) розміром до 100 мкм. Відстань від об'єкту до детектора випромінювання 5 м. Оцінити ширину смуги випромінювання, при якій інтерференційна картина ще буде спостерігатися.

91. В точці $\vec{r} = 0$ спостерігається конструктивна інтерференція двох хвиль, $\psi_1 = a \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})$ та $\psi_2 = a \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r} + \phi)$, причому вимірювана інтенсивність $\langle I \rangle = \langle I \rangle_{\text{max}} = \left(\sqrt{\langle I_1 \rangle} + \sqrt{\langle I_2 \rangle} \right)^2$. Знайти найближчу до $\vec{r} = 0$ точку \vec{r}_* , в якій спостерігається інтерференційний мінімум. Вважати, що кут між хвильовими векторами \vec{k}_1 і \vec{k}_2 дорівнює γ , $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$.

92. Знайти амплітуду коливання, що виникає внаслідок додавання трьох коливань однакового напрямку: $\xi_1 = a \cos \omega t$, $\xi_2 = 2a \sin \omega t$, $\xi_3 = 1,5a \cos(\omega t + \pi/3)$. Розв'язок навести в графічному вигляді.

93. Електромагнітна хвиля $E(t, \vec{r})$ утворена внаслідок суперпозиції N когерентних хвиль $E_k(t, \vec{r})$ з частотами $\omega_k = \omega$. В точці простору $\vec{r} = 0$ $E_k(t, 0) = E_0 \cos(\omega t + (k-1)\alpha)$, де k - номер хвилі, $(k=1, 2, \dots, N)$, α - різниця фаз між k -тою та $(k-1)$ -тою хвилями в даній точці. Знайти а) амплітуду та б) інтенсивність результуючої хвилі. Задачу розв'язати двома способами: за допомогою векторної діаграми та аналітично.

94. Нерухома система, що випромінює, складена з лінійного ланцюжка точкових джерел випромінювання. Відстань між сусідніми джерелами d , фаза коливань k -того джерела відносно першого лінійно змінюється вздовж ланцюга. Знайти залежність від часу різниці фаз $\Delta\phi$ між сусідніми джерелами, за якої головний максимум випромінювання системи буде здійснювати кругове “обстеження” місцевості зі сталою частотою ω . Довжина хвилі випромінювання λ .
95. Система складається з двох точкових когерентних випромінювачів, розташовані в точках А $(0, d/2, 0)$ і Б $(0, -d/2, 0)$ площини xy декартової системи координат. Дипольні моменти обох випромінювачів паралельні осі z , довжина хвилі $\lambda \ll d$. Коливання випромінювача Б відстають за фазою від А на α ($\alpha < \pi$). Знайти а) значення кутів θ (відрахованих від осі y) для яких інтенсивність випромінювання максимальна; б) умови, за яких в напрямку $\theta = \pi$ інтенсивність випромінювання буде максимальна, а в протилежному напрямку – мінімальна.
96. Система складається з двох точкових когерентних випромінювачів, розташовані в точках А $(0, d/2, 0)$ і Б $(0, -d/2, 0)$ площини xy декартової системи координат. Дипольні моменти обох випромінювачів паралельні осі z , довжина хвилі $\lambda = 2d$. Знайти приблизний вигляд діаграми напрямленості випромінювання (тобто, залежності інтенсивності випромінювання від кута, що визначає напрямок спостереження) в площині z , якщо коливання обох випромінювачів а) співпадають по фазі; б) мають протилежні фази.
97. Дві антени, що випромінюють когерентний сигнал з довжиною хвилі λ , розташовані паралельно одна одній на відстані $d = \lambda$ одна від одної. Знайти кутовий розподіл інтенсивності сигналу $I(\phi)$, що буде сприйматися в екваторіальній площині системи на відстані $R \gg d$ від передатчиків. Антени генерують сигнали а) в фазі; б) в протифазі.
98. Знайти середню за часом енергію коливання, яке отримано в результаті додавання накладання двох хвиль $\psi_1 = a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ та $\psi_2 = a \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \phi(t))$ в точці \vec{r}_* . Вважати, що протягом часу спостереження всі значення $\phi(t)$ зустрічаються з однаковою ймовірністю.
99. В вакуумі вздовж осі x розповсюджуються дві однаково поляризовані ЕМХ з електричними складовими
- $$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx), \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \phi)$$
- Знайти середнє значення густини потоку енергії.
100. Знайти залежність вимірюваної інтенсивності від часу вимірювання Δt для биття, утвореного додаванням двох хвиль з близькими частотами $\omega_1, \omega_2 \approx \omega$, $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega$ в певній точці простору. Вважати, що $2\pi/\omega \ll \Delta t$. Розглянути граничні випадки $\Delta t \ll T$ і $\Delta t \gg T$, де T – період биття. В якому з цих випадків хвилі можна вважати когерентними, відповідь обґрунтувати.

Розділ 4

Оптичне випромінювання

§1 Джерела оптичного випромінювання

Теплове випромінювання Густина електромагнітної енергії: u

Спектральна густина:

$$u_{\omega} = \frac{du}{d\omega}. \quad (4.1)$$

Кількість електромагнітної енергії заданої частоти, яку випромінює тіло з площини dS в тілесний кут 2π дорівнює $\mathcal{E}(\omega, T)dS$, де $\mathcal{E}(\omega, T)$ – спектральна здатність до випромінювання.

Зв'язок спектральної здатності і спектральної густини:

$$\mathcal{E}(\omega, T) = \frac{c}{4}u_{\omega}. \quad (4.2)$$

Закон Стефана-Больцмана для енергетичної світимості абсолютно чорного тіла:

$$M_e = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega, T)d\omega = \sigma T^4, \quad [M_e] = \text{Вт/м}^2, \quad (4.3)$$

де T – абсолютна температура, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}^4$ – стала Стефана-Больцмана.

Гіпотеза Планка: $E_n = nE_0 = n\hbar\omega$, де квант дії $\hbar = h/(2\pi) = 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$, $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

Закон зміщення Віна для довжини хвилі λ_{\max} , що відповідає максимуму спектральної густини енергії теплового випромінювання в одиниці об'єму u_{λ} : $T\lambda_{\max} = b$, де стала $b = 0,29 \text{ см}\cdot\text{К}$. Формула Планка для спектральної густини енергії теплового випромінювання в одиниці об'єму:

$$u_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (4.4)$$

Граничні випадки формули Планка:

- $\hbar\omega \ll kT$, закон Релея-Джинса:

$$u_\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2. \quad (4.5)$$

- $\hbar\omega \gg kT$, закон випромінення Віна

$$u_\omega = \omega^3 F\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar\omega/kT}. \quad (4.6)$$

Задачі

101. Енергетична світимість абсолютно чорного тіла дорівнює $M(T)=3,0$ Вт/см². Визначити довжину хвилі, що відповідає максимуму енергії випромінювання цього тіла.
102. Випромінювання Сонця за спектральним розподілом близько до випромінювання абсолютно чорного тіла. Максимум енергії випромінювання припадає на довжину хвилі 0,48 мкм. Знайти масу, яку Сонце втрачає за рахунок випромінювання протягом 1 сек. Оцінити час, за який маса Сонця зменшиться на 1 %.
103. Для вольфрамової нитки розжарення, що знаходиться при температурі 2000 К, визначити: а) довжину хвилі, що відповідає максимуму енергії випромінювання; б) масу, яку нитка втрачає протягом 1 сек за рахунок випромінювання. Нитку вважати циліндром довжиною 5 см і товщиною 1 мм.
104. Температура поверхні Сонця 6000 К. Оцінити температуру Землі в такій моделі: Земля та Сонце знаходяться в тепловій рівновазі, коефіцієнт поглинання Сонця і Землі дорівнює 1. Радіус Землі 6370 км, радіус Сонця 695 тис. км, відстань від Землі до Сонця 149,5 млн. км.
105. Спектральний розподіл енергії теплового випромінювання задається формулою Віна $u(\omega, T) = A\omega^3 e^{-a\omega/T}$, де $a=7,64$ пс·К. Знайти для температури 2000 К найбільш ймовірну а) частоту випромінювання; б) довжину хвилі випромінювання.
106. За допомогою формули Планка знайти потужність випромінювання одиниці поверхні абсолютно чорного тіла з температурою $T = 3000$ К, що припадає на вузький інтервал довжин хвиль $\Delta\lambda = 1,0$ нм поблизу максимуму спектральної густини випромінювання.
107. Отримати за допомогою формули Планка вирази для спектральної густини енергії випромінювання u_ω в граничних випадках малих частот, $\hbar\omega \ll k_B T$, (формула Релея-Джинса) та великих частот, $\hbar\omega \gg k_B T$, (формула Віна).

108. Отримати за допомогою формули Планка закон зміщення Віна.
109. Система квантових осциляторів з частотою ω знаходиться при температурі T . Яка ймовірність знайти в цій системі осцилятор з енергією $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$?
110. Знайти за допомогою формули Планка кількість фотонів в порожнині об'ємом 1 см^3 при температурі T в спектральних інтервалах $(\omega, \omega + d\omega)$ та $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.
111. Користуючись результатами задачі 110, оцінити кількість фотонів в порожнині об'ємом 1 см^3 (око) при температурі а) Сонця (6000 K); б) Землі (300 K) в видимому оптичному діапазоні (довжина хвилі випромінювання від 400 до 700 нм). Знайти відношення кількості “Сонячних” фотонів, розсіяних на об'єкті, до кількості фотонів, які випромінюються об'єктом (відношення сигнал/шум).
112. Користуючись результатами задачі 110, оцінити кількість фотонів в порожнині об'ємом 1 см^3 (око) при температурі а) Сонця (6000 K); б) Землі (300 K) в інфрачервоному діапазоні (довжина хвилі випромінювання від 1 до 20 мкм). Знайти відношення кількості “Сонячних” фотонів, розсіяних на об'єкті, до кількості фотонів, які випромінюються об'єктом (відношення сигнал/шум).
113. Користуючись результатами задач 111, 112 пояснити, чому око людини чутливе саме в оптичному (а не інфрачервоному) діапазоні.
114. Оцінити довжину хвилі, що відповідає максимуму енергії випромінювання тіла людини (температура 300 K). Знайти відношення числа фотонів, що випромінюються тілом, в інфрачервоному (довжина хвилі 10 мкм) та оптичному (довжина хвилі 500 нм) діапазоні.

§2 Характеристики видимого світла

Світловий потік Для монохроматичного світла з довжиною хвилі λ :

$$\Phi(\text{лм}) = K_m V(\lambda) \Phi_e, \quad (4.7)$$

де $K_m = 683 \text{ лм/Вт}$, $V(\lambda)$ – відносна спектральна чутливість. Для немонахроматичного світла з спектральною потужністю $\phi_e = d\Phi_e/d\lambda$:

$$\Phi(\text{лм}) = K_m \int V(\lambda) \phi_e d\lambda. \quad (4.8)$$

Сила світла – світловий потік в одиницю тілесного кута Ω :

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (4.9)$$

Освітленість – світловий потік Φ_{ad} , що падає на одиницю поверхні:

$$E = \frac{d\Phi_{\text{ad}}}{dS}. \quad (4.10)$$

Зв'язок освітленості і сили світла точкового джерела (позначення див. на Рис.4.1):

$$E = I \frac{\cos \alpha}{r^2}. \quad (4.11)$$

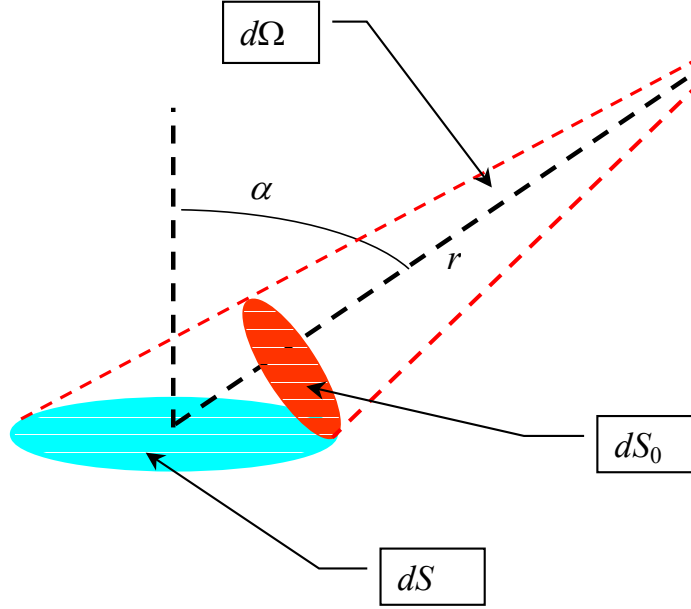


Рис. 4.1: Освітленість від точкового джерела.

Світимість – це світловий потік, який випромінюється або відбивається від одиниці поверхні в тілесний кут 2π :

$$M = \frac{\Delta\Phi_{\text{em}}}{\Delta S}. \quad (4.12)$$

Яскравість – це світимість в даному напрямку в одиницю тілесного кута (див. Рис. 4.2)):

$$L(\theta, \varphi) = \frac{\Delta\Phi_{\text{em}}}{\Delta S \Delta\Omega \cos \theta} = \frac{\Delta\Phi_{\text{em}}}{\Delta S_0 \Delta\Omega} = \frac{I(\theta, \varphi)}{\Delta S_0}. \quad (4.13)$$

Якщо для джерела (поверхні, що світиться), яскравість $L = \text{const}$ не залежить від напрямку, то таке джерело називають *ламбертівським*. Для ламбертівського джерела

$$M = \frac{\Delta\Phi_{\text{em}}}{\Delta S} = \pi L. \quad (4.14)$$

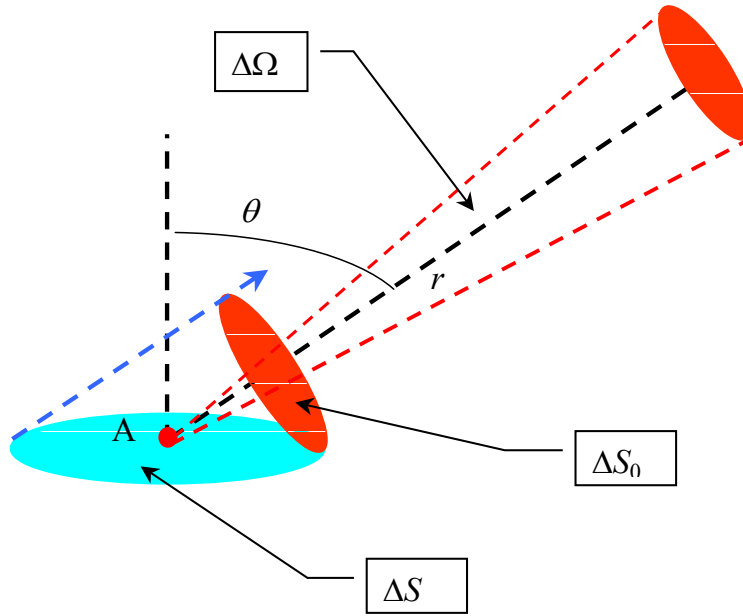


Рис. 4.2: До визначення яскравості.

Табл. 4.1: Фотометричні одиниці.

	Назва	Позначення	Од. вим.	Скор.
1	Світловий потік	Φ	люмен	лм
2	Сила світла	$I = d\Phi/d\Omega$	кандела	кд
3	Освітленість	$E = d\Phi_{ad}/dS$	люкс	лк
4	Світимість	$M = \Delta\Phi_{em}/\Delta S$		лм/м ²
5	Яскравість	$L = \Delta\Phi_{em}/(\Delta S\Delta\Omega \cos \theta)$		кд/м ²

Задачі

115. Для Ламбертівського джерела знайти зв'язок між світимістю і яскравістю.
116. Лампа розжарення потужністю 60 Вт створює світловий потік в 1000 лм. Розглядаючи лампу як точкове джерело світла, знайти
- а) ефективність лампи (відношення світлового потоку до потужності спожитої електричної енергії);
 - б) силу світла такої лампи.
117. Лампа розжарення знаходиться на висоті 1,5 м над столом і створює світловий потік в 1000 лм. Чи достатня така освітленість для нормального читання (50 лк)?
118. Кімната має розміри 5м х 5м і висоту 3 м. Скільки ламп розжарювання необхідно розмістити в центрі кімнати під стелею, щоб всюди в кімнаті освітленість була не менше рівня нормального читання (50 лк). Кожна з ламп випромінює світловий потік в 1000 лм, розглядати люстру (сукупність ламп) як точкове джерело. Яка при цьому максимальна освітленість?
119. Кімната має розміри 5м х 5м. Точкове джерело світла розміщено в центрі кімнати на висоті 3 м. Освітленість на поверхні стола висотою 1,5 м, розташованого безпосередньо під джерелом, становить 100 лк. Чи достатня для нормального читання освітленість на поверхні такого ж стола, розташованого в кутку кімнати?

§3 Інтерференція світла

Спостережувальна інтенсивність при інтерференції:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (4.15)$$

Умова інтерференційного максимуму:

$$x_{\max} = \frac{m\lambda R}{d}. \quad (4.16)$$

Ширина інтерференційної смуги:

$$\Delta x = \frac{\lambda R}{d}. \quad (4.17)$$

Задачі

120. В досліді Ллойда світлова хвиля, створена безпосередньо джерелом S (вузька щілина) інтерферує з хвилею, відбитою від дзеркала Z . В результаті на екрані утворюється система інтерференційних смужок. Відстань від джерела до екрана $\ell = 100$ см. При певному розташуванні джерела ширина інтерференційної смуги на екрані дорівнювала $\Delta x = 0,25$ см, а після того, як джерело відсунули від площини дзеркала на $\Delta h = 0,60$ мм, ширина смуг зменшилась в $\eta = 1,5$ разів. Знайти довжину хвилі світла. Світло вважати монохроматичним.
121. *Кільця Ньютона.* Плоско-опуклу лінзу з радіусом кривизни сферичної поверхні R притиснули до скляної платівки. Довжина хвилі світла λ . Розглянути умову інтерференції променів 1 і 2, відбитих від лінзи та платівки (див. Рис.4.3), і отримати формулу для радіуса r_n n -того темного кільця Ньютона у відбитому світлі.

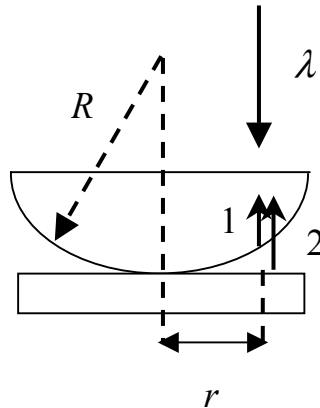


Рис. 4.3: Установка для спостереження кілець Ньютона

122. Дві когерентні плоскі світлові хвилі (довжина хвилі λ) кут між напрямками розповсюдження яких дорівнює $\phi \ll 1$, падають майже нормально на екран. Амплітуди хвиль однакові. Показати, що відстань між сусідніми максимумами на екрані дорівнює $\Delta x = \lambda/\phi$.
123. Інтерференційну картину спостерігають за допомогою бідзеркал Френеля, кут між якими дорівнює $\alpha = 1,0'$. Джерело світла – вузька щілина ширини h , – знаходиться на відстані $r = 10,0$ см від лінії перетину дзеркал, довжина хвилі випромінювання $\lambda = 0,55$ мм. Інтерференційну картину спостерігають на екрані, який розташовано на відстані $b = 130$ см від лінії перетину дзеркал. Знайти а) ширину інтерференційної смуги на екрані та число можливих максимумів; б) зсув інтерференційної картини на екрані при зміщенні щілини на $\delta \ell = 1,0$ мм по дузі радіуса r з центром на лінії перетину дзеркал; ширину щілини h , за якої інтерференційні смуги

на екрані будуть ще спостерігатись розбірливо. Вважати, що обидва уявні джерела (зображення первинного джерела) лежать на лінії, яка паралельна площині екрана. *Вказівка:* при визначенні відстані від уявних джерел до екрана врахувати відстань r між ними та дзеркалами.

124. Плоска світлова хвиля падає на бідзеркала Френеля, кут між якими $\alpha = 2,0'$. Визначити довжину хвилі світла, якщо ширина інтерференційної смуги на екрані дорівнює $\Delta x = 0,55$ мм.
125. Плоска монохроматична хвиля падає нормально на діафрагму з двома вузькими щілинами, що знаходяться на відстані 2,5 мм одна від одної. На екрані, який розташований на відстані 1 м від діафрагми, спостерігають систему інтерференційних смуг. Куди (в який бік) і на скільки змістяться смуги, якщо одну з щілин перекрити скляною платівкою завтовшки 10 мкм. Показник заломлення скла 1,5.
126. *Кільця Ньютона.* Плоско-опуклу лінзу із радіусом кривизни сферичної поверхні 12,5 см притиснули до скляної платівки. Діаметри 10-го та 15-го темних кілець Ньютона у відбитому світлі дорівнюють 1,00 та 1,50 мм. Знайти довжину хвилі світла.
127. Лінзу діаметром 5 см з фокусною відстанню 25 см розрізали по діаметру навпіл і видалили із середини шар завтовшки 1 мм. Після цього обидві половини з'єднали і утворили білінзу. В фокальній площині білінзи розташовано вузьку щілину, яка випромінює монохроматичну хвилю із довжиною 0,60 мкм. За білінзою стоїть екран, на відстані 50 см. Знайти ширину та кількість інтерференційних смуг на екрані та максимальну ширину щілини, за якої інтерференційні смуги на екрані будуть ще спостерігатися.
128. На тонку плівку ($n=1,33$) падає під кутом 52° пучок білого світла. Знайти, при якій товщині плівки дзеркально відбитий пучок буде мати переважно жовтий колір ($\lambda = 0,60$ мкм).
129. Знайти мінімальну товщину мильної плівки із показником заломлення 1,33, за якої світло з довжиною хвилі 0,64 мкм відбивається максимально, а світло із довжиною хвилі 0,40 мкм не відбивається взагалі. Кут падіння дорівнює 30° . По обидві сторони плівки знаходяться повітря. Кривизною плівки знехтувати.
130. Для зменшення втрат на відбивання поверхню скла обробляють тонким шаром речовини із показником заломлення $n' = \sqrt{n}$, де n – показник заломлення світла. В цьому випадку амплітуди світлових хвиль, відбитих від обох поверхонь такого шару однакові. При якій товщині цього шару світло з довжиною хвилі λ взагалі не буде відбиватися в напрямку перпендикулярному до плівки?

§4 Дифракція світла. Голографія

Радіус зовнішньої границі k -ї зони Френеля

$$r_k = \sqrt{\frac{k\lambda ab}{a+b}},$$

де a, b – відстань від діафрагми до джерела світла та екрана, відповідно.

Якщо розмір отвору $r \propto \sqrt{\lambda b}$, то дифракція по Френелю (фронт хвилі “в отворі” сферичний); якщо $r \ll \sqrt{\lambda b}$, то дифракція по Фраунгоферу (фронт хвилі “в отворі” плоский); якщо $\lambda \ll r^2/b$, то працює наближення геометричної оптики.

Роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN$$

де λ – довжина хвилі світла, що падає, $\delta\lambda$ – мінімальна різниця довжин хвиль, яку можна розрізнити за допомогою ґратки в k -му порядку, N – кількість штрихів.

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi Nd}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)}. \quad (4.18)$$

Задачі

131. Нео-імпресіоніст Джордж Сора (George Seurat) працював в манері пуантилістів. Його картини складаються з щільно розташованих окремих точок (плям розміром 0,4 мм) різного кольору. Змішування кольорів відбувається “в очі” глядача. На якій відстані слід розглядати картини Сора, щоб відчуті змішування кольорів? Прийняти діаметр зіниці 4 мм, довжина хвилі для різних кольорів лежить в діапазоні від 400 до 700 нм.
132. Точкове джерело світла з довжиною хвилі $\lambda = 0,50$ мкм, розташоване на відстані $a = 100$ см перед діафрагмою з коловим отвором радіуса $r = 1,0$ мм. Знайти відстань від діафрагми до точки спостереження, для якої кількість зон Френеля в отворі становить $k = 3$.
133. Між точковим джерелом світла і екраном розмістили діафрагму з коловим отвором, радіус r якого можна змінювати. Відстані від діафрагми до джерела і до екрана дорівнюють, відповідно, $a = 100$ см і $b = 125$ см. Визначити довжину хвилі світла, якщо максимум освітленості в центрі дифракційної картини на екрані спостерігається при $r_1 = 1,00$ мм, а наступний максимум при $r_2 = 1,29$ мм.

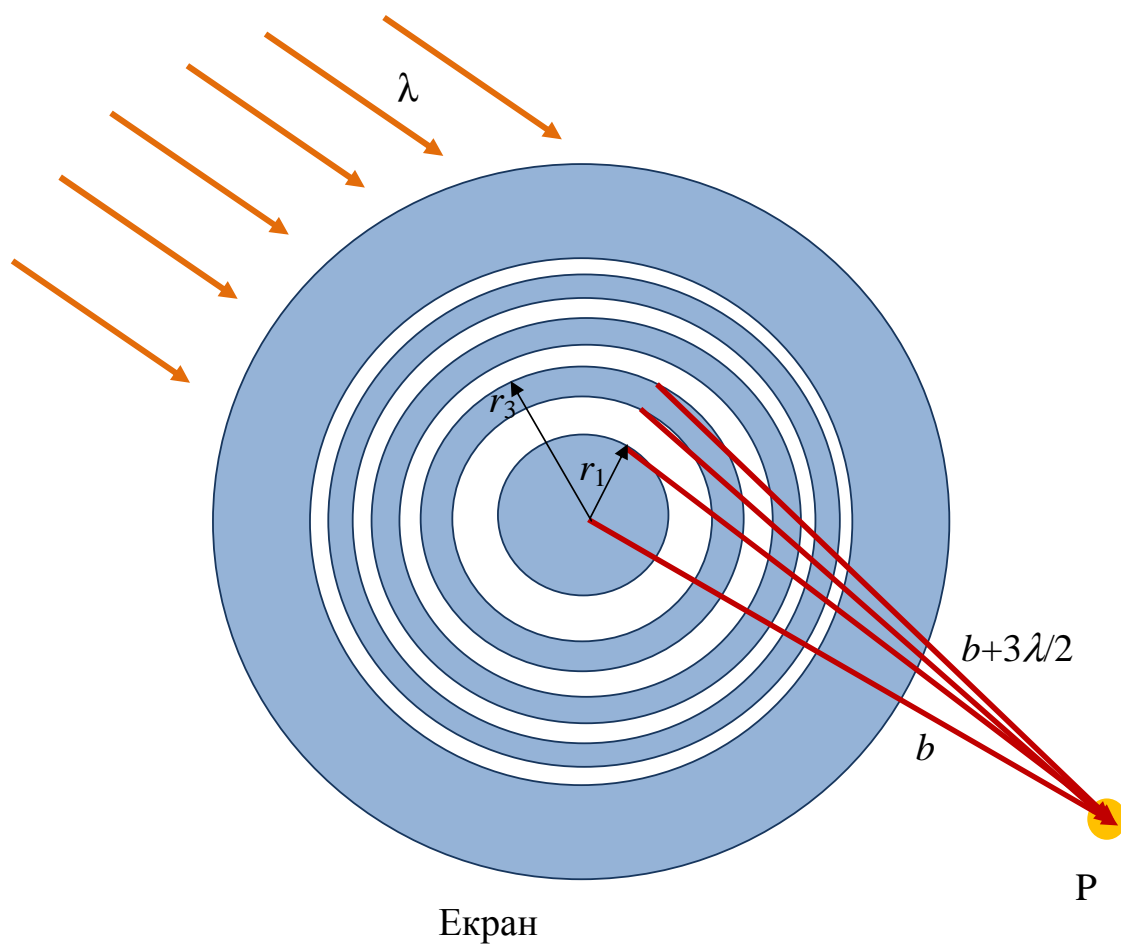


Рис. 4.4: Зоны Френеля. P – точка спостереження.

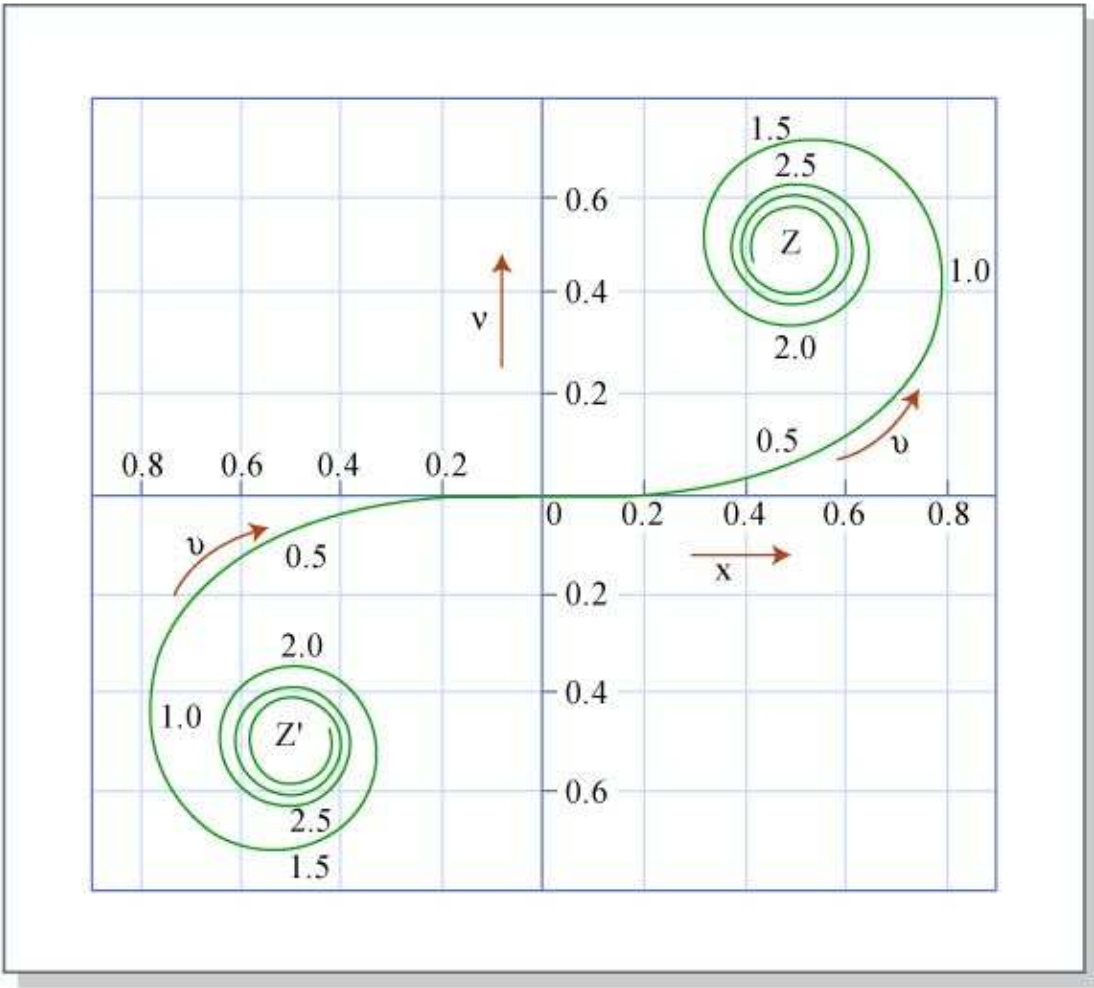


Рис. 4.5: Спіраль Корню.

134. Світло з довжиною хвилі λ падає нормально на довгу прямокутну щілину ширини b . Знайти кутовий розподіл інтенсивності світла при дифракції по Фраунгоферу, а також кутовий розподіл мінімумів.

135. Дифракційна решітка має N щілин, період решітки d . Решітку опромінюють плоскою монохроматичною хвилею з інтенсивністю I_0 і довжиною хвилі λ . Показати, що розподіл інтенсивності за решіткою в залежності від кута θ визначається формулою

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi N d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}.$$

136. Користуючись формулою

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi N d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

для інтенсивності дифрагованого світла (λ – довжина хвилі, N – кількість щілин дифракційної решітки з періодом d) визначити: а) значення кутів θ , в яких спостерігаються максимуми інтенсивності; б) значення інтенсивності в максимумах; в) ширину дифракційного максимуму m -того порядку; г) роздільну здатність решітки.

137. Світло падає нормально на дифракційну решітку. Кут дифракції для лінії з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,65$ мкм в 2-му порядку дорівнює 45° . Знайти кут дифракції для лінії з довжиною хвилі $\lambda_1 = 0,50$ мкм в 3-му порядку.

138. Показати, що при нормальному падінні світла на дифракційну решітку максимальна величина її роздільної здатності не може перевищувати значення L/λ , де L – ширина решітки, λ – довжина хвилі.

139. Показати на прикладі дифракційної решітки, що різниця частот двох максимумів, яку можна розділити за критерієм Релея, дорівнює зворотній величині різниці часів проходження граничних коливань, що інтерферують, тобто, $\delta\nu = 1/\delta t$.

140. Світло, що містить дві спектральні лінії з довжинами 600,000 та 600,050 нм, падає нормально на дифракційну ґратку ширини 10,0 мм. Знайти кут дифракції θ для якого ці дві лінії знаходяться на границі роздільності (за критерієм Релея).

141. Світло падає нормально на дифракційну ґратку ширини 6,5 см, яка має 200 штрихів на мм. За допомогою ґратки досліджується спектр, що містить двокомпонентну лінію з довжиною хвилі 670,8 нм. Різниця в довжинах хвиль компонент становить 0,015 нм. Знайти: а) в якому порядку ці компоненти можна розрізнити; б) найменшу різницю довжин хвиль, яку може розрізнити ця ґратка в області довжин хвиль 670 нм. Скористатися формулою для інтенсивності дифрагованого світла

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi N d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}.$$

142. При записі голограми від невеликого предмета використовують монохроматичне світло з довжиною хвилі $0,60 \text{ мкм}$. Відстань між предметом і фотопластинкою дорівнює 40 см . Яким повинен бути розмір фотопластинки, щоб на голограмі можна було записати деталі предмета розміром 10 мкм ?
143. **Ефект Тальбота** На дифракційну ґратку з періодом d падає плоска світлова хвиля із довжиною λ . На відстані L від решітки поставили таку ж саму дифракційну ґратку.
- Знайти сумарну інтенсивність безпосередньо за другою ДР в залежності від L .
 - Знайти видність інтерференційної за другою ДР в залежності від розміру ґратки D . Порівняти із випадком однієї ДР.
 - Як зміниться видність інтерференційної картини, якщо одна із ДР нахилена відносно іншої на малий кут ϕ .
 - Порівняти з випадком геометричної оптики ($\lambda \rightarrow 0$). Площини решіток вважати паралельними, розміром щілини знехтувати, прийняти $L \gg d \gg \lambda$.
144. В умовах попередньої задачі врахувати скінчений розмір щілини b . Зробити оцінки, взявши $d = 1 \text{ мкм}$, $b = 0,5 \text{ мкм}$, $\lambda = 2 \text{ нм}$, $L = 0,2 \text{ м}$, $D = 1,5 \text{ см}$, $\phi = 2 \times 10^{-3} \text{ рад}$.
145. Оцінити напруженість електричного поля в промені лазерного випромінювання з потужністю 10 Вт , що падає на пляму розміром $0,05 \times 1,3 \text{ мм}^2$. Довжина хвилі $514,5 \text{ нм}$. Знайти кількість фотонів, що їх випромінює лазер за 1 с .

§5 Дисперсія світла

Задачі

146. На скляну платівку перпендикулярно до її поверхні падають дві плоскі когерентні монохроматичні хвилі, поляризовані у взаємно-перпендикулярних напрямках:

$$\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz); \quad \vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - kz).$$

Платівка має товщину ℓ , показники заломлення для хвилі \vec{E}_1 і \vec{E}_2 відрізняються на Δn . Знайти поляризацію хвилі, що утворилась внаслідок суперпозиції \vec{E}_1 і \vec{E}_2 на вході і на виході з платівки. Довжина обох хвиль в вакуумі λ , прийняти, що $\ell = \lambda/(4\Delta n)$.

147. Оптична система складається з двох паралельних поляризаторів, між якими знаходиться платівка $\lambda/2$. Головна оптична вісь платівки утворює кут ϕ із осями поляризаторів. На платівку падає світло із інтенсивністю I_0 . Знайти залежність інтенсивності світла, що виходить із другого поляризатора, від кута ϕ .

148. Трубка з бензолом довжини 26 см знаходиться в поздовжньому магнітному полі соленоїда, який розташований між двома поляризаторами. Кут між поляризаторами дорівнює 45° . Знайти мінімальну напруженість магнітного поля, за якої світло з довжиною хвилі 589 нм буде проходити через цю систему лише в одному напрямку (оптичний вентиль). Як буде вести себе цей вентиль, якщо змінити напрямок магнітного поля на протилежний? Стала Верде для бензола $2,59 \text{ кут.хв/А}$.
149. Кварцеву пластинку вирізано паралельно оптичній осі і розташовано між двома поляризаторами. Площини пропускання поляризаторів взаємно перпендикулярні і утворюють кут 45° із оптичною віссю пластинки. Товщина пластинки 0,50 мм, різниця показників заломлення звичайного та незвичайного променів дорівнює $\Delta n = 0,0090$. Знайти довжину хвилі оптичного (0,50-0,60 мкм) діапазону, для якої інтенсивність світла, що пройшло через цю систему, не залежить від повороту заднього поляризатора.
150. З певної речовини виготовили дві платівки – одну товщиною 3,8 мм, а іншу – товщиною 9,0 мм. Знайти лінійний показник поглинання цієї речовини, якщо відомо, що при внесенні по чергові цих платівок в пучок монохроматичного світла перша платівка пропускає 0,84 світлового потоку, а друга – 0,70. Вторинним відбиттям від платівок знехтувати.

Розділ 5

Основи квантової фізики

§1 Хвильові властивості часток

Рівняння Ейнштейна для *фотоефекта* (1905 р.)

$$\hbar\omega = A + T, \quad (5.1)$$

де $\omega = 2\pi/\lambda$ – частота фотона, A – робота виходу електрона, T – кінетична енергія електрона. В нерелятивістському випадку $T = mv^2/2$.

Ефект Комптона (1923 р.)

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos \varphi), \quad \lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc}, \quad (5.2)$$

m – маса електрона. Величину λ_C називають комптонівською довжиною хвилі.

Атомні спектри, постулати Бора (1913 р.)

- Радіус орбіти r , по якій обертається електрон зі швидкістю v , визначається умовою:

$$mr_nv_n = n\frac{h}{2\pi},$$

Тут $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер орбіти, r_n – радіус орбіти номер n , v_n – швидкість електрона на цій орбіті.

- Якщо електрон переходить з “вищої” боровської орбіти з номером s на “нижчу” боровську орбіту з номером n , то атом випромінює фотон, енергія якого дорівнює

$$h\nu = E_s - E_n,$$

де E_s , E_n величина енергії електрона на цих орбітах. Навпаки, якщо атом поглинає фотон з такою енергією, то електрон переходить з “нижчої” боровської орбіти на “вищу”.

Радіус орбіти

$$r_n = \frac{\hbar^2}{2kme^2} \cdot n^2 = a_B \cdot n^2, \quad (5.3)$$

а величину $a_B \equiv \hbar^2/(kme^2) = 5,3 \cdot 10^{-11}$ м називають радіусом Бора.

Повна енергія електрона на орбіті

$$E_n = \frac{E_0}{n^2}, \quad E_0 = -\frac{k^2me^4}{2\hbar^2}. \quad (5.4)$$

$$E_0 = -13,55 \text{ еВ} = -21,7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Частота випромінювання

$$\omega_{sn} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{s^2} \right), \quad R = \frac{k^2me^4}{2\hbar^3}. \quad (5.5)$$

Стала Рідберга $R = 2,1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$.

Тут всюди $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ в системі СІ і $k = 1$ в СГСЕ.

Співвідношення де Бройля : $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $\lambda = 2\pi\hbar/p$ – хвиля де Бройля.

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{r} \cdot \vec{p}) \right]. \quad (5.6)$$

Співвідношення невизначеностей

- Гайзенберга: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$, $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar$, $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar$;
- енергетичне $\Delta E \Delta t \geq \hbar$

Задачі

151. *Ефект Комптона*. Навести докладний вивід формули для ефекту Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \varphi).$$

152. Виходячи з постулатів теорії Бора вивести формули (в системі СГС): $r_n = n^2 a_B$, де $a_B = \hbar^2/(me^2)$, $E_n = -E_0/n^2$, де $E_0 = me^4/(2\hbar^2)$, і

$$\omega_{sn} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{s^2} \right).$$

153. Виходячи з припущення, що частка є хвильовим пакетом з хвиль де Бройля, отримати формулу для фазової швидкості

$$V_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2}} = V_{\Phi}(\omega),$$

тобто, хвильовий пакет розпливається.

154. Показати, що максимальне значення напруженості електричного поля в класичній фізиці $E_{\text{clas}}^{(\text{max})} = m^2 c^4 / e^3$, а в квантовій фізиці $E_{\text{quant}}^{(\text{max})} = 2m^2 c^4 / \hbar e$, тобто,

$$E_{\text{quant}}^{(\text{max})} = 2 \frac{e^2}{\hbar c} E_{\text{clas}}^{(\text{max})}.$$

Всі формули в системі СГС.

155. Фотон з енергією 250 кеВ розсіявся під кутом 120° на електроні, що перед тим знаходився в стані спокою. Знайти енергію фотона, що розсіявся.
156. Фотон з енергією 1,00 МеВ розсіявся на електроні, що перед тим знаходився в стані спокою. Знайти кінетичну енергію електрона після розсіяння, якщо довжина хвилі фотона змінилась на 25%.
157. Показати за допомогою законів збереження, що вільний електрон не може повністю поглинути фотон.
158. Обчислити довжину хвилі де Бройля електрона, прискореного різницею потенціалів 100 В.
159. Оцінити роздільну здатність (тобто, мінімальну відстань між об'єктами, які можна розрізнити) електронного мікроскопа. Прискорююча напруга 120 кВ. Пучок вважати монохроматичним (фактичний розкид по енергіям становить 0,15 еВ), просторовим розходженням пучка знехтувати.
160. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей невизначеність швидкості електрона в атомі водню. Порівняти отриману величину зі швидкістю електрона на першій борівській орбіті в цьому ж атомі. Розмір атома водню прийняти 0,10 нм.
161. Невизначеність положення частки $\Delta x = \lambda / 2\pi$, де λ – довжина хвилі де Бройля. Показати, що для цієї частки невизначеність швидкості дорівнює (по порядку величини) самій швидкості.
162. Вільний електрон в момент часу $t = 0$ локалізований в області розміром 0,10 нм. Оцінити ширину області локалізації цього електрона через 1 с.

163. Паралельний пучок моноенергетичних електронів падає нормально на діафрагму з вузькою прямокутною щілиною ширини $d=1,5$ мкм. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, який знаходиться на відстані $L=1$ м від діафрагми, ширина першого дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x=0,4$ мм.
164. Частка рухається зліва направо в потенціальному полі, як показано на Рис. Висота бар'єру $U=15$ еВ, кінетична енергія частки $T=20$ еВ. В скільки разів і як зміниться довжина хвилі де'Бройля частки при переході через бар'єр?
165. Відстань від електронної пушки до екрана в електронно-променевої трубі дорівнює $L=30$ см, прискорююча напруга $U=10$ кВ. Знайти невизначеність координати електрона на екрані, якщо діаметр електронної плями на екрані дорівнює $d=0,4$ мм.
166. Електрон знаходиться в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Ширина ями ℓ . Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей силу тиску електрона на стінки цієї ями при мінімально можливій енергії електрона.
167. Частка маси m рухається в одновимірному потенціальному полі $U = \kappa x^2/2$ (гармонічний осцилятор). Оцінити мінімально можливу енергію частки в такому полі.
168. Паралельний пучок атомів водню, що рухаються зі швидкістю $v = 600$ м/с, падає нормально на вузьку щілину, за якою на відстані 1 м розташовано екран. Оцінити ширину щілини, за якої ширина її зображення на екрані буде мінімальною.
169. Пучок моноенергетичних електронів налітає на екран з двома щілинами. За екраном в точці Р знаходиться детектор електронів. Відомо, що якщо закрити одну щілину, то детектор покаже 400 відліків, а якщо закрити іншу щілину - то 900 відліків. Скільки відліків покаже детектор, якщо відкрити обидві щілини? Чому дорівнює відношення амплітуд хвиль, які відповідають проходженню через одну щілину при закритій іншій? Розглянути випадки коли а) в точці Р спостерігається інтерференційний максимум; б) в точці Р спостерігається інтерференційний мінімум.

§2 Основні положення квантової механіки

§2.1 Оператори

Координати $x \Rightarrow \hat{x} = x$; $\vec{r} \Rightarrow \hat{\vec{r}} = \vec{r}$.

Імпульсу $\vec{p} \Rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$, або

$$\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}.$$

Моменту імпульсу $\vec{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$, або

$$\begin{aligned}\hat{M}_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{M}_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \hat{M}_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Енергії частинки маси m (гамільтоніан): $\hat{H} = \hat{T} + \hat{U}$ або

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + U(\vec{r}).$$

§2.2 Постулати квантової механіки

Хвильова функція ψ є елементом нескінченновимірному функціонального простору квадратично інтегровних функцій. Такий простір називають Гільбертовим (ГП). Оскільки хвильова функція є вектором Гільбертового простору, то її називають ще вектором стану. Власні функції операторів при цьому відіграють роль “ортів” в просторі. Скалярний добуток двох векторів α і β в ГП визначається співвідношенням

$$(\alpha, \beta) = \int_{\Omega} \alpha^* \beta d\Omega. \quad (5.7)$$

Нормою вектора стану називають

$$N = (\alpha, \alpha) = \int_{\Omega} |\alpha|^2 d\Omega. \quad (5.8)$$

Оператор \hat{F} називають *ермітовим*, якщо він задовільняє умові:

$$\int_{\Omega} \psi_1^* \hat{F} \psi_2 d\Omega = \int_{\Omega} (\hat{F}^* \psi_1^*) \psi_2 d\Omega, \quad (5.9)$$

тобто, $(\psi_1, \hat{F} \psi_2) = (\hat{F} \psi_1, \psi_2)$. Вважається, що вектор стану нормований, $(\psi, \psi) = 1$.

Не всі ермітові оператори мають повну ортонормовану систему власних функцій. Однак, ті ермітові оператори, що представляють *фізичні* величини, мають повну ортонормовану систему власних функцій. З цієї причини такі оператори часто називають *спостережувальними*. Доведення того факту, що певний ермітів оператор є спостережувальною, представляє, як правило, складну математичну задачу. Таку задачу вдалося, зокрема, розв’язати для операторів координати і імпульса, гамільтоніана одновимірної системи, оператора момента імпульсу.

Оператори, що застосовуються в квантовій механіці, повинні бути *лінійними*, для того, щоб виконувався принцип *суперпозиції* станів. Оператори, що відповідають спостережувальним, мають ще одну властивість: всі їх власні числа дійсні, оскільки відповідають результатам вимірювань.

Умова ортонормованості власних функцій:

$$\int_{\Omega} \psi_m^* \psi_n d\Omega = \delta_{mn}, \quad (\psi_m, \psi_n) = \delta_{mn}. \quad (5.10)$$

Середнє значення фізичної величини F :

$$\langle \hat{F} \rangle \equiv \frac{\int_{\Omega} \psi^* \hat{F} \psi d\Omega}{\int_{\Omega} \psi^* \psi d\Omega} = \frac{(\psi, \hat{F} \psi)}{(\psi, \psi)} = (\psi, \hat{F} \psi). \quad (5.11)$$

§2.3 Комутатори

Умова можливості одночасно виміряти фізичні величини L і F :

$$[\hat{L}, \hat{F}] \equiv \hat{L}\hat{F} - \hat{F}\hat{L} = 0. \quad (5.12)$$

Комутатори деяких операторів: координати та імпульсу

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar, \quad (5.13)$$

компонент моменту імпульсу

$$[\hat{M}_x, \hat{M}_y] = i\hbar \hat{M}_z, \quad [\hat{M}_y, \hat{M}_z] = i\hbar \hat{M}_x, \quad [\hat{M}_z, \hat{M}_x] = i\hbar \hat{M}_y. \quad (5.14)$$

Комутують (комутатор дорівнює нулю): $[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$ і т.п., $[\hat{x}, \hat{y}] = 0$ і т.п. $[\hat{\vec{M}}^2, \hat{M}_x] = 0$ і т.п. Тут $\hat{\vec{M}}^2 = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + \hat{M}_z^2$.

Задачі

170. Показати, що оператори імпульсу \hat{p}_x , моменту імпульсу \hat{M}_z , оператор Лапласа Δ є ермітовими.

171. Визначити, чи є ермітовим оператор

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{2} (\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x}).$$

172. Розкрити дужки в наступних операторних виразах:

- a) $(d/dx + x)^2$;
- b) $(d/dx + 1/x)^3$;
- c) $(xd/dx)^2$;
- d) $(d/dxx)^2$;
- e) $(i\hbar\nabla + \vec{A}(\vec{r}))^2$;
- f) $(\hat{A} - \hat{B})(\hat{A} + \hat{B})$.

173. Показати, що комутатор $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$.

174. Показати, що $[\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = 0$, якщо $\alpha \neq \beta$.

175. Показати, що $[\hat{M}_\alpha, \hat{M}_\beta] \neq 0$, якщо $\alpha \neq \beta$.

176. Виходячи з визначення комутатора $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ довести, що $[\hat{A} \cdot \hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.

177. Обчислити комутатори таких операторів:

- a) операторів \hat{x} і d/dx ;
- b) операторів $i\hbar\nabla$ і вектор-потенціалу $\vec{A}(\vec{r})$;
- c) операторів $\partial/\partial\varphi$ і довільної функції $f(r, \theta, \varphi)$;
- d) оператора координати \hat{x} та оператора Гамільтона

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{x}),$$

де $U(x)$ – відома функція;

- e) $[\hat{M}_x, \hat{y}]$, $[\hat{M}_x, \hat{p}_y]$, $[\hat{M}_x, \hat{M}_y]$, де $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{r}}$ і $\hat{\mathbf{p}}$ – оператори моменту імпульсу, координати та імпульсу, відповідно.

178. Показати, що $[\hat{\mathbf{M}}^2, \hat{\mathbf{r}}] = 2\hbar^2\hat{\mathbf{r}} + 2i\hbar\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{M}}$, де $\hat{\mathbf{M}}$ і $\hat{\mathbf{r}}$ – оператори моменту імпульсу та координати, відповідно.

179. Знайти оператори, ермітово спряжені до операторів: d/dx , d^n/dx^n , $\exp(i\alpha\partial/\partial\varphi)$, де α – стала.

180. Обчислити середнє значення імпульсу для частки, хвильова функція якої дорівнює $\psi = Ae^{ikx}$.

181. В початковий момент частка знаходиться в стані з хвильовою функцією $\psi = A\exp(-x^2/4\sigma^2 + ikx)$. Знайти:

- a) сталу A ;

- b) середнє значення координати та імпульсу частки;
- c) середнє значення кінетичної енергії частки;
- d) невизначеність значення координати, $\Delta x \equiv \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2}$ та імпульсу, $\Delta p \equiv \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$ частки;
- e) густину струму ймовірності \vec{j} ;
- f) густину ймовірності ρ .

182. Електрон рухається в центральному полі. Показати, що оператор проекції моменту імпульсу на вісь z в сферичних координатах має вигляд:

$$\hat{M}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

§3 Рівняння Шрьодінгера

Рівняння Шрьодінгера для частинки . Нестационарне:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi, \quad \text{або} \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (5.15)$$

де $\psi(x, y, z, t)$ – хвильова функція, m – маса частинки, $U(x, y, z)$ – потенціальна енергія.

Стационарне:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0, \quad (5.16)$$

де $\psi(x, y, z)$ – хвильова функція, E – енергія частинки в стационарному стані.

Частинка в потенціальній ямі Одновимірна нескінченно глибока потенціальна яма ширини a : хвильова функція в стационарному стані

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi(n+1)x}{a}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (5.17)$$

Енергія в стационарному стані:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}{2ma^2}. \quad (5.18)$$

Тривимірна нескінченно глибока прямокутна потенціальна яма з розмірами a, b, c : хвильова функція в стационарному стані

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z), \quad (5.19)$$

де

$$k_1 = \frac{\pi(n_1 + 1)}{a}, \quad k_2 = \frac{\pi(n_2 + 1)y}{b}, \quad k_3 = \frac{\pi(n_3 + 1)z}{c} \quad n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Енергія в стаціонарному стані:

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left[\frac{(n_1 + 1)^2}{a^2} + \frac{(n_2 + 1)^2}{b^2} + \frac{(n_3 + 1)^2}{c^2} \right]. \quad (5.20)$$

Одновимірний гармонічний осцилятор ($U(x) = m\omega_0^2 x^2/2$): рівняння Шрьодінгера

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \right) \psi = 0, \quad (5.21)$$

енергія стаціонарного стану $E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Густина потоку ймовірності

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (5.22)$$

Рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \rho = |\psi|^2. \quad (5.23)$$

Тунельний ефект Коефіцієнт проникності D прямокутного бар'єру в квази-класичному наближенні $a|q| \gg 1$, де $|q| = \sqrt{2m(U - E)}/\hbar$:

$$D \approx \frac{16k^2|q|^2}{(k^2 + |q|^2)^2} \exp(-2a|q|), \quad U > E, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (5.24)$$

В загальному випадку, для оцінок

$$D \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U(x) - E)} dx \right\}. \quad (5.25)$$

Задачі

183. Привести рівняння (5.21) до безрозмірного вигляду:

$$\psi''(\xi) + (\lambda - \xi^2) \psi(\xi) = 0,$$

де

$$x = x_0 \xi, \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}.$$

184. Отримати рівняння неперервності (5.23), виходячи з визначення ρ і нестационарного рівняння Шрьодінгера (5.15).
185. Знайти розв'язок рівняння Шрьодінгера (5.15) для вільної квантової частки, що рухається вздовж додатного напрямку осі x з імпульсом p_x . Маса частки m .
186. Скориставшись результатом задачі 185, обчислити густину струму ймовірності вільної квантової частинки.
187. Показати, що густина струму ймовірності для вільної частинки $\vec{j} = \rho \vec{v}$, де $\rho = |\psi|^2$.
188. Знайти середній квадрат імпульса частки, що рухається в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі. Частка знаходиться на рівні з $n = 1$.
189. Частка маси m знаходиться в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі ширини ℓ . Знайти хвильові функції, значення імпульсу та енергії цієї частки в стаціонарних станах.
190. Частка маси m знаходиться в основному стані в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі. На краю ями просторова похідна хвильової функції дорівнює $|\partial\psi/\partial x| = a$. Знайти енергію E частки в даному стані.
191. Частка маси m знаходиться в одновимірній потенціальній ямі з потенціалом $U(x) = kx^2/2$ (гармонічний осцилятор). Для цієї частки а) записати стаціонарне рівняння Шрьодінгера та граничні умови, що накладаються на хвильову функцію; б) скориставшись анзацом

$$\psi(x) = f(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right),$$

дослідити асимптотичну ($f(x) = \text{const}$) поведінку хвильової функції при $x \rightarrow \pm\infty$ і визначити сталу x_0 (характерний масштаб проникнення частки за межі потенціальної ями); с) отримати рівняння для $f(x)$; d) знайти мінімальне значення енергії стаціонарного стану, яке відповідає умові $f(x) = \text{const}$, і відповідну хвильову функцію.

192. Частинка маси m знаходиться в двовимірній прямокутній нескінченно глибокій потенціальній ямі розмірами $\ell \times \ell$. Хвильові функції стаціонарних станів частки мають вигляд:

$$\psi_{n_1 n_2}(x, y) = A \sin \frac{\pi n_1 x}{\ell} \sin \frac{\pi n_2 y}{\ell}.$$

Знайти сталу A , відповідну енергію і кратність виродження перших $3x$ енергетичних рівнів.

193. Частинка маси m рухається в двовимірному потенціальному полі

$$U(x, y) = \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

Записати рівняння Шрьодінгера і, користуючись відомим результатом для одновимірного гармонічного осцилятора знайти власні значення енергії E_{n_1, n_2} в стаціонарних станах. *Вказівка:* Скористатись методом розділення змінних.

194. Користуючись результатами задачі 191 для найнижчого стану (стану з мінімальною енергією) обчислити: а) середні значення імпульсу та координати; б) середньоквадратичне відхилення імпульсу та координати; с) середні значення кінетичної та потенціальної енергії. Перевірити виконання співвідношення невизначеності для цього стану.

195. Нехай $\partial \hat{A} / \partial t = 0$. Показати, що

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{A} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{A}] \rangle.$$

196. Знайти середню (повну) енергію осцилятора з трьома степенями вільності.

197. Показати, що хвиля де Бройля

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp \left[-\frac{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar} \right]$$

задовільняє рівнянню Шрьодінгера.

198. *Тунельний ефект.* Показати, що коефіцієнт проходження через потенціальний бар'єр:

$$D = \frac{|\vec{j}_3|}{|\vec{j}_1|} = |C_3|^2, \quad (\text{де } C_1 = 1).$$

199. Частки маси m з енергією E рухаються зліва на потенціальний бар'єр

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ U_0 & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти а) коефіцієнт відбиття R цього бар'єра при $E > U_0$; б) ефективну глибину проникнення часток в область $x > 0$ при $E < U_0$, тобто, відстань від границі бар'єра до точки, де щільність ймовірності знайти частку зменшується в e разів.

200. Користуючись формулою (5.25) знайти для електрона маси m з енергією E ймовірність D проходження крізь потенціальний бар'єр заданої форми.

$$a) \quad U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \quad x \geq \ell \\ U_0 x / \ell & 0 \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

$$b) \quad U(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \ell \\ U_0(1 - x^2/\ell^2) & |x| \leq \ell. \end{cases}$$

§4 Будова атому

Всі формули в даному розділі наведені в системі одиниць СГС.

Атом водню Енергія електрона в атомі водню (див. також (5.4)):

$$E_n = \frac{E_0}{n^2}, \quad E_0 = -\frac{k^2 m e^4}{2\hbar^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.26)$$

Момент імпульсу $M = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$, $\ell = 0, 1, \dots, (n-1)$.

Проекція моменту імпульсу на вісь z : $M_z = \hbar m_\ell$, $m_\ell = -\ell, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell$. Хвильова функція основного стану електрона

$$\psi_{100}(\vec{r}) = A \exp(-r/a_B), \quad (5.27)$$

де $a_B \equiv \hbar^2/(m e^2)$ – радіус Бора, див. розділ §1, стор.40

Магнітний орбітальний момент електрона в атомі (e – заряд електрона)

$$\mu^\ell = -\frac{e\hbar}{2mc}\sqrt{\ell(\ell+1)} = -\mu_B\sqrt{\ell(\ell+1)}, \quad (5.28)$$

$\mu_B = e\hbar/(2mc)$ – магнетон Бора (c – швидкість світла).

Проекція магнітного орбітального моменту на вісь z : $\mu_z^\ell = -\mu_B m_\ell$.

Ефект Зеемана : розщеплення енергетичних рівнів електрона в магнітному полі H : $\Delta E = \pm\mu_B H m_\ell$.

Спіновий магнітний момент : Проекція спінового моменту на вісь z : $M_z^S = m_s \hbar$, $m_s = \pm 1/2$. Магнітний спіновий момент $\vec{\mu}^S = -(e/mc)\vec{M}^S$. Проекція спінового магнітного моменту на вісь z :

$$\mu_z^S = -\frac{e}{mc} M_z^S = \mp \frac{e\hbar}{2mc} = \mp \mu_B. \quad (5.29)$$

Розщеплення енергетичних рівнів в магнітному полі $\Delta E = \pm\mu_B H$.

Досліди Штерна і Герлаха : сила, що діє на електрон в неоднорідному полі за рахунок спінового моменту:

$$F \approx \pm\mu_B \frac{dH}{dz}. \quad (5.30)$$

Складний атом . Класифікація енергетичних рівнів: оболонки в залежності від головного квантового числа n позначають такими латинськими літерами: K ($n = 1$), L ($n = 2$), M ($n = 3$), N ($n = 4$), і т.д. Енергія електрона залежить від головного квантового числа n та орбітального ℓ : $E = E(n, \ell)$. Сукупність рівнів з однакою енергією називають підоболонкою. В залежності від значення орбітального числа підоболонки позначають такими латинськими літерами: s^2 ($\ell = 0$), p^6 ($\ell = 1$), d^{10} ($\ell = 2$), f^{14} ($\ell = 3$), де верхній індекс вказує максимальну можливу кількість електронів в підоболонці. В незбудженому стані атома максимально можливе значення $\ell = 3$, і, відповідно, зайняті підоболонки до f включно.

Максимально можливе число електронів в оболонці з номером n дорівнює $2n^2$, наприклад, в К-оболонці 2 електрони, в L-оболонці – 8 електронів, в M-оболонці – 18 електронів і т.д.

Приклади запису станів складних атомів: гідроген $^1H: 1s^1$, гелій $^2He: 1s^2$, літій $^3Li: 1s^2 2s^1$, берилій $^4Be: 1s^2 2s^2$, бор $^5B: 1s^2 2s^2 2p^1$, неон $^{10}Ne: 1s^2 2s^2 2p^6$, натрій $^{11}Na: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$, срібло $^{47}Ag: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^1$.

Задачі

201. Знайти для електрона атома гідрогену в основному стані з хвильовою функцією $\psi(r) = A \exp(-r/r_1)$, де A , r_1 – сталі, відношення середньої відстані до ядра $\langle r \rangle$ до найбільш ймовірної r_{prob} .
202. Електрон в атомі гідрогену знаходиться в основному стані з хвильовою функцією $\psi(r) = A \exp(-\alpha r)$, де A , α – сталі. Знайти ймовірність знаходження цього електрона поза межами класичних границь поля.
203. Електрон в атомі гідрогену знаходиться в основному стані з хвильовою функцією $\psi(r) = A \exp(-r/r_1)$, де A – стала нормування, r_1 – перший радіус Бора. Знайти для цього стану середні значення а) модуля сили Кулона, що діє на електрон; б) потенціальної енергії взаємодії електрона з ядром.
204. Зовнішня оболонка атома має структуру $s^2 p^3$, всі рівні в оболонці вироджені по енергії. Атом помістили в магнітне поле H . Знайти кількість невироджених рівнів і величину розщеплення.
205. Пучок моноенергетичних електронів (з імпульсом p_x) рухається вздовж осі x . В точці $x = 0$ пучок проходить крізь магніт, який створює неоднорідне магнітне поле H (паралельне осі z) із заданим градієнтом dH/dz . Знайти відстань вздовж осі z між пучками з протилежною проекцією спіну на відстані L від магніту. Вважати, що товщина магніту h в напрямку x набагато мала, $h \ll L$, електрони взаємодіють з магнітним полем тільки всередині магніту.
206. Пояснити, чому кількість електронів в оболонках обмежена.

207. Обчислити максимальну кількість електронів на оболонці з номером n .

Розділ 6

Будова матерії і фізика макросистем

§1 Основи термодинаміки

Ентропія Статистична вага (термодинамічна ймовірність) Ω – кількість мікростанів, які реалізують даний макростан. *Формула Больцмана* для ентропії S :

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (6.1)$$

де $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана.

Зв'язок сталої Больцмана з універсальною газовою сталою $R = 8,314$ Дж/(К·моль): $k_B = R/N_A$, де $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ (моль) $^{-1}$ – число Авогадро (кількість молекул в 1 молі).

Другий принцип термодинаміки: якщо в певний момент часу ентропія *замкненої* системи відрізняється від максимального для цієї системи значення S_{\max} , то в наступні моменти часу ентропія не зменшується, вона або збільшується, або, в граничному випадку, залишається сталою, тобто, $\Delta S \geq 0$.

Температура при сталому об'ємі $V = \text{const}$

$$T = \frac{dE}{dS} = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V, \quad (6.2)$$

де E – внутрішня енергія.

Рівняння стану ідеального газу (Менделєєва-Клапейрона) $PV = \nu RT$, де ν – кількість молів.

Рівняння стану неідеального газу (Ван-дер-Ваальса):

$$\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2} \right) (V - b\nu) = \nu RT, \quad (6.3)$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса.

Робота в термодинаміці

$$A_{12} = \int_1^2 P(V, T) dV \quad (6.4)$$

Перший принцип термодинаміки: $\delta Q = dE + \delta A$, в інтегральній формі $Q = (E_2 - E_1) + A_{12}$, де δQ – кількість теплоти. Для ізольованої системи $\delta Q = 0$, $A_{12} = -\Delta E$.

Об'єднаний перший та другий принцип термодинаміки:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} = \frac{dE + PdV}{T}. \quad (6.5)$$

ККД теплового двигуна (ідеальна машина Карно) з температурою нагрівача T_1 і температурою холодильника T_2 :

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (6.6)$$

Теплоємність (функція процесу):

$$C = \frac{\delta Q}{\delta T}. \quad (6.7)$$

Для ізохорного ($V = \text{const}$) і ізобарного ($P = \text{const}$) процесів:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \quad C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P, \quad (6.8)$$

де $H = E + PV$ – ентальпія.

Співвідношення Р. Майера: $C_P = C_V + R$ (для моля ідеального газу).

Внутрішня енергія ідеального газу $E = \nu c_V T + \text{const}$,

В загальному випадку систем із змінною кількістю частинок N внутрішня енергія $E(S, V, N)$,

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V, N}, \quad P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, N}, \quad \mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V}. \quad (6.9)$$

Тут μ – хімічний потенціал.

Для квантових систем внутрішня енергія $E = \sum_j n_j E_j$, де n_j – кратність виро-дження рівня з енергією E_j .

Перший принцип термодинаміки: $dE = \sum_j E_j dn_j + \sum_j n_j dE_j$. Тут $\sum_j E_j dn_j = \delta Q$ – теплота, $\sum_j n_j dE_j = -\delta A$ – робота.

Задачі

208. Яку кількість теплоти слід надати макроскопічній системі, температуру якої 350 К підтримують сталою, щоб збільшити статистичну вагу (термодинамічну ймовірність) системи в 10^9 разів?
209. Один моль ідеального газу, який складається з одноатомних молекул, знаходиться в посудині при температурі $T=300$ К. Як і у скільки разів зміниться статистична вага (термодинамічна ймовірність) цієї системи, якщо її нагріти ізохорично на 1 К?
210. N атомів гелію (в газовому стані) знаходяться при кімнатній температурі (300 К) в кубічній посудині об'ємом $1,0 \text{ см}^3$. Знайти ймовірність того, що всі атоми зберуться в одній половині посудини та приблизне значення N , при якому ця подія може відбутися протягом 10^{10} років (вік Всесвіту).
211. Знайти статистичну вагу найбільш ймовірного розподілу $N = 10$ однакових молекул по двох однакових половинах посудини. Знайти ймовірність такого розподілу.
212. Теплоізований циліндр поділено на дві однакові частини невагомим поршнем. По один бік поршня знаходиться один моль ідеального газу із показником адиабати γ , а по інший бік – вакуум. Початкова температура газу T_0 . Поршень відпустили і газ заповнив всю посудину. Після цього поршень повільно перемістили в початкове положення. Знайти зміну внутрішньої енергії та ентропії газу в результаті обох процесів.
213. Ідеальний газ адіабатично розширився із деякого стану 1 до об'єму V . Порівняти тиск, що встановився в кінці процесу, у двох випадках: процес зворотний і процес незворотний.
214. При низьких температурах теплоємність кристалів залежить від температури як $C = aT^3$, де a - деяка стала. Знайти ентропію кристалу як функцію температури в цій області.
215. В деякому процесі температура речовини залежить від його ентропії S за законом $T \propto S^n$, де n – стала. Знайти теплоємність C речовини як функцію S .
216. Робоча речовина виконує цикл, в межах якого температура T змінюється в n разів, а сам цикл має вигляд, вказаний на рис. 6.1, де S – ентропія. Знайти ККД циклів.
217. *Пляшку вина занесли із підвалу (температура повітря в якому була 5°) в теплу кімнату (температура повітря 25°). Як зміниться ентропія Всесвіту після того, як пляшка нагрілася? відповідь обґрунтувати.

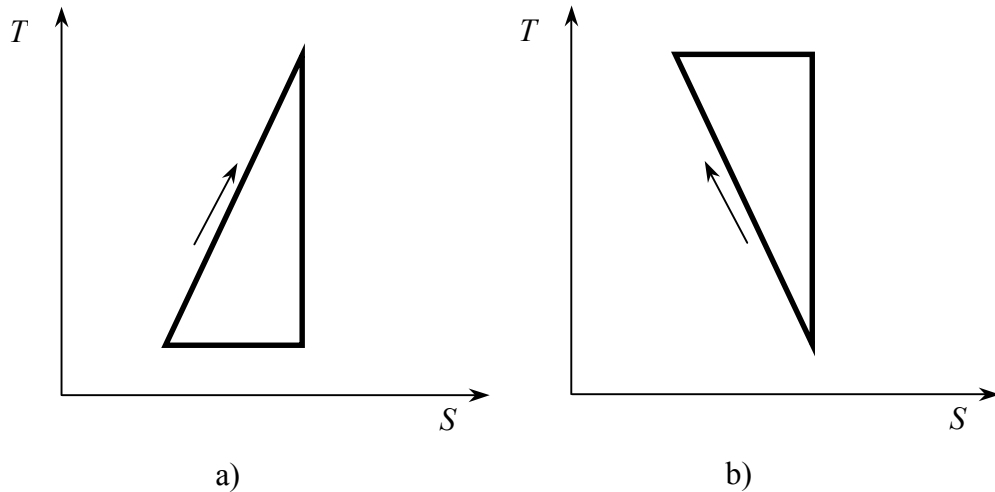


Рис. 6.1:

218. Яку кількість теплоти слід надати макроскопічній системі, яка знаходиться при температурі 290 К, щоб збільшити її статистичну вагу (термодинамічну ймовірність) на 1,0 %?
219. Дві однакові теплоізолювані посудини з'єднані трубою з краном. В кожній з посудин знаходиться по 1 молю одного й того ж ідеального газу. Температура газу в одній посудині T_1 , а в іншій T_2 , молярна теплоємність C_V газу відома. Після відкриття крану газ прийшов в новий стан. Знайти приріст ентропії газу ΔS , показати, що $\Delta S > 0$.
220. Адіабатично ізолюваний горизонтальний циліндр з газом розділений на дві однакові частини рухомим теплопровідним поршнем. Поршень закріплено пружиною. В початковий момент середні кінетичні енергії теплового руху молекул в обох частинах однакові, а тиски відносяться, як 1:2. Знайти відношення енергії деформації пружини до внутрішньої енергії газу в одній із половин посудини.
221. Холодильник теплової машини підтримують при сталій температурі ($T_2 = 285$ К), а нагрівник має масу $m = 100$ г, питому теплоємність $c_V = 0,46$ Дж/(г·К) і охолоджується при контакті з робочим тілом машини. Початкова температура нагрівника $T_1 = 1500$ К. Яку максимальну роботу може здійснити ця тепла машина? Для розв'язку задачі цикл теплової машини розбити на цикли Карно, в яких виконується нескінченно мала робота dA .

§2 Статистична фізика

Мінімальні розміри комірки фазового простору $\Gamma = \int_{\Gamma} dqdp$: $\Delta\Gamma_{\min} = (2\pi\hbar)^n$, де n – кількість степенів вільності.

Статистична вага стану в об'ємі $\Delta\Gamma = \prod_{j=1}^n \Delta q_j \Delta p_j$ фазового простору дорівнює

$$\Omega = \frac{\prod_{j=1}^n \Delta q_j \Delta p_j}{(2\pi\hbar)^n} \quad (6.10)$$

Канонічний розподіл Гіббса

$$f(q, p) = A \exp\left(-\frac{E(q, p)}{k_B T}\right), \quad \int_{\Gamma} f(q, p) d\Gamma = 1. \quad (6.11)$$

Ентропія за Больцманом (з урахуванням квантово-механічних обмежень)

$$S = -k_B \langle \ln [(2\pi\hbar)^n f(q, p)] \rangle = -k_B \int_{\Gamma} f(q, p) \ln [(2\pi\hbar)^n f(q, p)] d\Gamma \quad (6.12)$$

Для квантових систем $f(q, p) \Rightarrow W_n = A \exp(-E_n/T)$, $\sum_n W_n = 1$, $S = -k_B \langle \ln W_n \rangle$.

Розподіл Максвелла за компонентами імпульсу

$$dW(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m k_B T}\right) dp_x dp_y dp_z; \quad (6.13)$$

За компонентами швидкості

$$dW(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}\right) dv_x dv_y dv_z; \quad (6.14)$$

За модулем швидкості

$$dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv. \quad (6.15)$$

Середня квадратична швидкість

$$v_{av} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}. \quad (6.16)$$

Найбільш ймовірна швидкість

$$v_{prob} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (6.17)$$

Середній модуль швидкості

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\mu}}. \quad (6.18)$$

Теорема про рівномірний розподіл середньої кінетичної енергії за степенями вільності (для частинок з 3-ма степенями вільності)

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{m}{2} (\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle) = \frac{m}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T. \quad (6.19)$$

Для одного моля ідеального газу $E = nk_B T N_A / 2 = nRT / 2$, n – число степеней вільності.

Молярна теплоємність в ізохорному процесі ($V = \text{const}$) $C_V = nR / 2$, в ізобарному процесі ($P = \text{const}$) $C_P = (n + 2)R / 2$.

Для одного моля твердого тіла $E = 3k_B T N_A = 3RT$, $C_V = 3R$ (закон Дюлонга і Пті).

Розподіл Больцмана за числом частинок

$$dW(x, y, z) = A \exp \left(-\frac{U(x, y, z)}{k_B T} \right) dV, \quad (6.20)$$

або

$$n(x, y, z) = n_0(x_0, y_0, z_0) \exp \left(-\frac{U(x, y, z)}{k_B T} \right), \quad (6.21)$$

де $n_0(x_0, y_0, z_0)$ – концентрація частинок ($n = dN/dv$), потенціальна енергія в точці (x_0, y_0, z_0) $U(x_0, y_0, z_0) = 0$. Барометрична формула

$$P(h) = P_0 \exp \left(-\frac{\mu g h}{k_B T} \right), \quad (6.22)$$

де P – тиск ізотермічної атмосфери на висоті h в однорідному полі сили тяжіння.

Розподіл Бозе-Ейнштейна Середня кількість бозонів в квантовому стані A

$$\langle n_A \rangle_{\text{B-E}} = \frac{1}{e^{(E_A - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (6.23)$$

де μ – хімічний потенціал.

Розподіл Фермі-Дірака Середня кількість ферміонів в квантовому стані A

$$\langle n_A \rangle_{\text{F-D}} = \frac{1}{e^{(E_A - \mu)/k_B T} + 1}, \quad (6.24)$$

Для електронного газу в металах див. Рис. 6.2

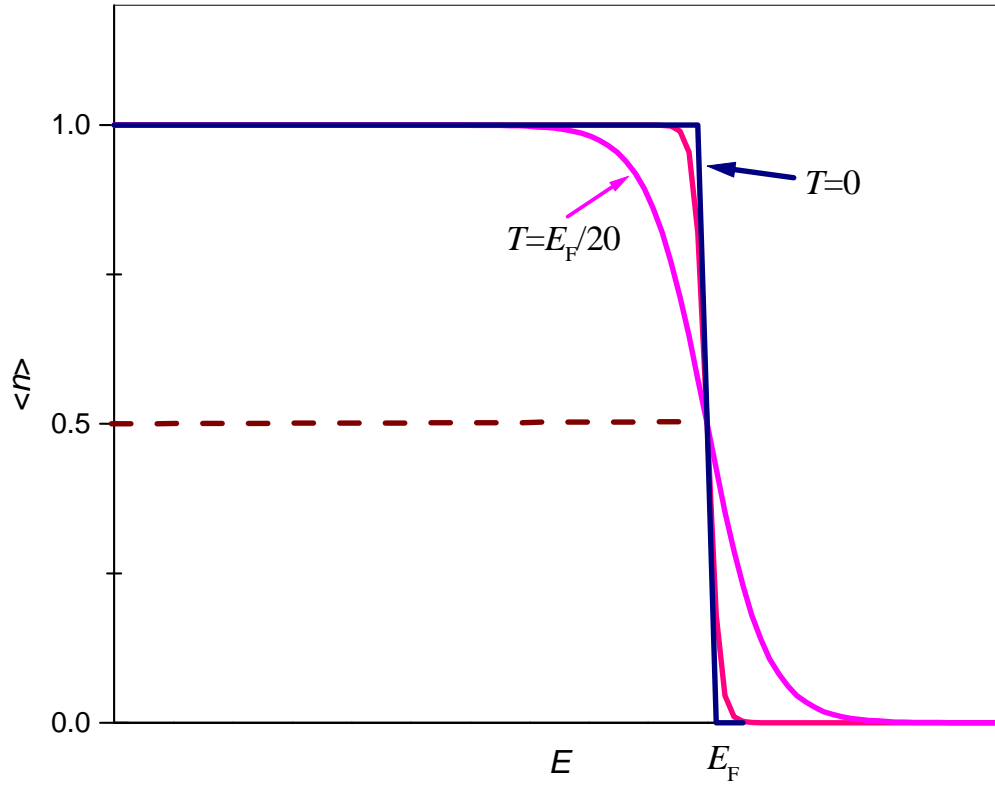


Рис. 6.2: Розподіл Фермі-Дірака для електронного газу в металах при різних температурах.

Концентрація носіїв заряду в напівпровідниках для випадку власної провідності

$$n = \text{const} (k_B T)^{3/2} e^{-E_g/2k_B T}, \quad (6.25)$$

де E_g – ширина забороненої зони

Кристалічна ґратка : для найпростішої ґратки (елементарна комірка складається з одного атома) концентрація мод

$$g(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{1}{v_{\parallel}^3} + \frac{2}{v_{\perp}^3} \right) \omega^2 = \frac{3V\omega^2}{2\pi^2 \langle v \rangle^3}, \quad (6.26)$$

Тут V – об'єм кристала, v_{\parallel} – швидкість поздовжньої хвилі, v_{\perp} – швидкість поперечної хвилі, $\langle v \rangle$ – середня швидкість.

$g(\omega)$ називають частотним спектром, числом станів із заданою частотою ω або щільністю станів з частотою ω .

Частота Дебая : $\omega_{\max} = \omega_D = (6\pi^2 n)^{1/3} \langle v \rangle$, де $n = N/V$ – концентрація атомів.

Енергія ґратки

$$E_{\text{lat}} = \sum_{j=1}^{3N} \hbar \omega_j \left(\langle n_j \rangle + \frac{1}{2} \right) = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\hbar \omega_j}{2} + \sum_{j=1}^{3N} \frac{\hbar \omega_j}{e^{\hbar \omega_j / k_B T} - 1} = E_0 + E_{\text{heat}} \quad (6.27)$$

Температура Дебая: $T_D = \hbar \omega_D / k_B \equiv \Theta$. Високі температури: $T \gg \Theta$, для одного моля

$$E_{\text{lat}} = E_0 + 3N_A k_B T = E_0 + 3RT, \quad C_V = 3R. \quad (6.28)$$

Низькі температури $T \ll \Theta$,

$$E_{\text{heat}} = \int_0^{\omega_D} \langle n_A \rangle \hbar \omega d\omega. \quad (6.29)$$

$g(\omega) = B\omega^2$, ($B = \text{const}$) Підставляючи в (6.29), отримуємо

$$E_{\text{heat}} = B\hbar \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar \omega / k_B T} - 1} \approx \frac{B(k_B T)^4}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \left(\frac{Bk_B^4 \pi^4}{15\hbar^3} \right) T^4. \quad (6.30)$$

Теплоємність $C_V \propto T^3$.

Задачі

222. Функція розподілу ймовірностей значень певної величини x має вигляд $f(x) = Ax$ на проміжку $0 \leq x \leq a$ і $f = 0$ при всіх інших значеннях x . Величини A та a – сталі. Вважаючи, що величина a відома, знайти найбільш ймовірне значення x , значення f при $x = a$, середні значення x та x^2 , дисперсію x .
223. Функція розподілу ймовірностей значень певної величини x має вигляд $f(x) = Ax(a - x)$ на проміжку $0 \leq x \leq a$ і $f = 0$ при всіх інших значеннях x . Величини A та a – сталі. Вважаючи, що величина a відома, знайти найбільш ймовірне значення x і відповідне значення f , середні значення x та x^2 , дисперсію x .
224. Знайти відносну кількість молекул, компоненти швидкості яких вздовж осі z знаходяться в інтервалі $(v_z, v_z + dv_z)$, а модулі перпендикулярної складової – $(v_\perp, v_\perp + dv_\perp)$. Маса кожної молекули m , температура газу T .
225. Знайти відносну кількість молекул, для яких модулі складової швидкості перпендикулярної до осі z знаходяться в інтервалі $(v_\perp, v_\perp + dv_\perp)$. Маса кожної молекули m , температура газу T .

226. Знайти відносну кількість молекул газу, швидкості яких відрізняються не більш ніж на $\delta\eta = 1,00\%$ від а) найбільш ймовірної швидкості; б) середньої квадратичної швидкості.
227. Знайти середню проекцію швидкості $\langle v_x \rangle$ та $\langle |v_x| \rangle$, якщо маса кожної молекули m , температура газу T .
228. Знайти величину $\langle 1/v \rangle$ і порівняти її з величиною $1/\langle v \rangle$. Температура газу T , маса кожної молекули m .
229. Ідеальний газ складається з молекул масою m з концентрацією n , температура газу T . Знайти за допомогою розподілу Максвелла кількість молекул газу ν , що падають щосекунди на одиничну площадку під кутами $(\theta, \theta + d\theta)$ до її нормалі.
230. Одноатомний газ складається з молекул маси m і має температуру T . Знайти функцію розподілу молекул $f(\epsilon)$ по кінетичним енергіям ϵ та найбільш ймовірне значення кінетичної енергії.
231. У високій вертикальній циліндричній посудині знаходиться вуглець (CO_2) при температурі T . Температуру газу збільшили в 3 рази. Знайти зміну тиску на дно посудини.
232. У закритій високій вертикальній циліндричній посудині знаходиться азот при температурі T . Температуру газу збільшили в 3 рази. Знайти висоту, на якій концентрація молекул не змінилась. Поля тяжіння вважати однорідним.
233. У закритій високій вертикальній циліндричній посудині знаходиться кисень при температурі T . Знайти середнє значення потенціальної енергії молекул газу.
234. Знайти кількість молекул газу ν , що падають на одиничну площадку за одиницю часу, якщо концентрація молекул n , температура газу T , маса кожної молекули m .
235. Розподіл молекул по швидкостям в пучку, що вилітає із невеличкого отвору в посудині, описується законом $F_1(v) = Av^3 \exp(-mv^2/2kT)$, де T – температура газу всередині посудини. Знайти найбільш ймовірне значення кінетичної енергії молекул в пучку.
236. В довгій вертикальній посудині знаходиться газ, що складається з молекул двох типів з масами m_1 і $m_2 > m_1$. Концентрації цих молекул у дна посудини дорівнюють, відповідно, n_1 і $n_2 > n_1$. Знайти висоту h , на якій концентрації молекул обох типів однакові. Вважати, що температура T та прискорення вільного падіння g однакові по всій висоті посудини.
237. Ідеальний газ з молекул масою m знаходиться в дуже високій циліндричній посудині при температурі T . Знайти середнє значення потенціальної енергії молекул

газу. Розглянути два випадки: а) газ складається з молекул одного сорту; б) газ складається з молекул двох сортів з масами m_1 і m_2 . Поле тяжіння вважати однаковим з прискоренням вільного падіння g .

238. Потенціальна енергія молекул газу в центральному полі залежить від відстані r до центра поля як $U(r) = ar^2$, де a – додатна стала. Температура газу T , концентрація молекул в центрі поля n_0 . Знайти відносну кількість молекул в шарі $(r, r + dr)$, найбільш ймовірну відстань молекул від центра поля, у скільки разів зміниться концентрація молекул в центрі поля при зменшенні температури в η разів.
239. Ідеальний газ з молекул масою m знаходиться в центральному полі, в якому потенціальна енергія молекул дорівнює $U(r)$, r – відстань до центра поля. Температура газу T , концентрація молекул в центрі поля n_0 . знайти кількість молекул в сферичному шарі $(r, r + dr)$ зі швидкостями, що відрізняються від найбільш ймовірної не більше ніж на $\delta\eta \ll 1$.
240. Визначити кількість власних поперечних коливань струни довжини ℓ в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$, якщо швидкість розповсюдження коливань дорівнює v . Вважати, що коливання відбуваються в одній площині.
241. Визначити кількість власних коливань прямокутної мембрани площини S в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$, якщо швидкість розповсюдження коливань дорівнює v . Вважати, що коливання відбуваються перпендикулярно до площини мембрани.
242. Вважаючи, що швидкості розповсюдження поздовжних та поперечних коливань однакові і дорівнюють v , визначити температуру Дебая для а) одновимірного кристалу (ланцюжок однакових атомів, який містить n_0 атомів на одиницю довжини); б) для двовимірного кристалу (плоскої квадратної решітки однакових атомів, що містить n_0 атомів на одиницю площі); в) для простої кубічної решітки з однакових атомів, що містить n_0 атомів на одиницю об'єму.
243. Обчислити середнє значення енергії нульових коливань, що припадає на один осцилятор кристалу в моделі Дебая, якщо температура Дебая кристалу дорівнює Θ .
244. Розподіл вільних електронів в металі при температурі $T \rightarrow 0$ має вигляд

$$dn = \frac{\sqrt{2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{E}dE,$$

де енергію електрону E відрховують від дна зони провідності. Знайти максимальну кінетичну енергію вільних електронів в металі, якщо їх концентрація дорівнює n , а також середню кінетичну енергію вільних електронів, якщо їх максимальна кінетична енергія дорівнює T_{\max} .

Табл. 6.1: Структура елементарних частинок

Адрони		
Баріони (3 кварки)		Мезони (2 кварки)
Нуклони (протони, нейтрони)	Гіперони	

245. Обчислити енергію нульових коливань, що припадає на 1 г міді (молярна маса 64 г/моль) з температурою Дебая $\Theta = 330$ К.
246. Кристал складається з N однакових атомів, температура Дебая дорівнює Θ . Знайти число фононів в інтервалі частот $(\omega, \omega + d\omega)$ при температурі T .
247. Показати, що при $T \rightarrow 0$ розподіл Фермі-Дірака набуває вигляду:

$$\langle n_A \rangle_{\text{F-D}} = \begin{cases} 1 & E \leq E_F, \\ 0 & E > E_F. \end{cases} \quad (6.31)$$

248. До якої температури треба б було нагріти класичний газ вільних (без урахування електростатичного відштовхування) електронів, щоб середня енергія його електронів дорівнювала б середній енергії вільних електронів в міді при температурі $T = 0$? Вважати, що на один атом міді припадає один вільний електрон.

§3 Елементи ядерної фізики

Елементарні частки і ядро Вся матерія у Всесвіті складається з кварків, лептонів та переносників взаємодії. Відомо 3 родини кварків і лептонів:

I e^- – електрон, ν_e – електронне нейтрино, u -кварк $(+2e/3)$, d -кварк $(-1e/3)$ та їхні античастинки. Протон: $p = uud$, нейтрон: $n = udd$

II μ^- – мюон, ν_μ – мюонне нейтрино, c -кварк $(+2e/3)$, s -кварк $(-1e/3)$ та їхні античастинки.

III τ – лептон, ν_τ – тау-лептонне нейтрино, t -кварк $(+2e/3)$, b -кварк $(-1e/3)$ та їхні античастинки.

Ядра атомів Радіус ядра r з масовим числом A (сумарна кількість протонів і нейтронів) визначається як $r = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1$ ФМ= 10^{-13} см.

Символ елемента ${}_Z^AX$, де Z – кількість протонів (тобто, величина електричного заряду ядра).

Енергія ядра: $E_{\text{нuc}} = m_{\text{нuc}}c^2 = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - \Delta m c^2$, m_p – маса протонів, m_n – маса нейтронів.

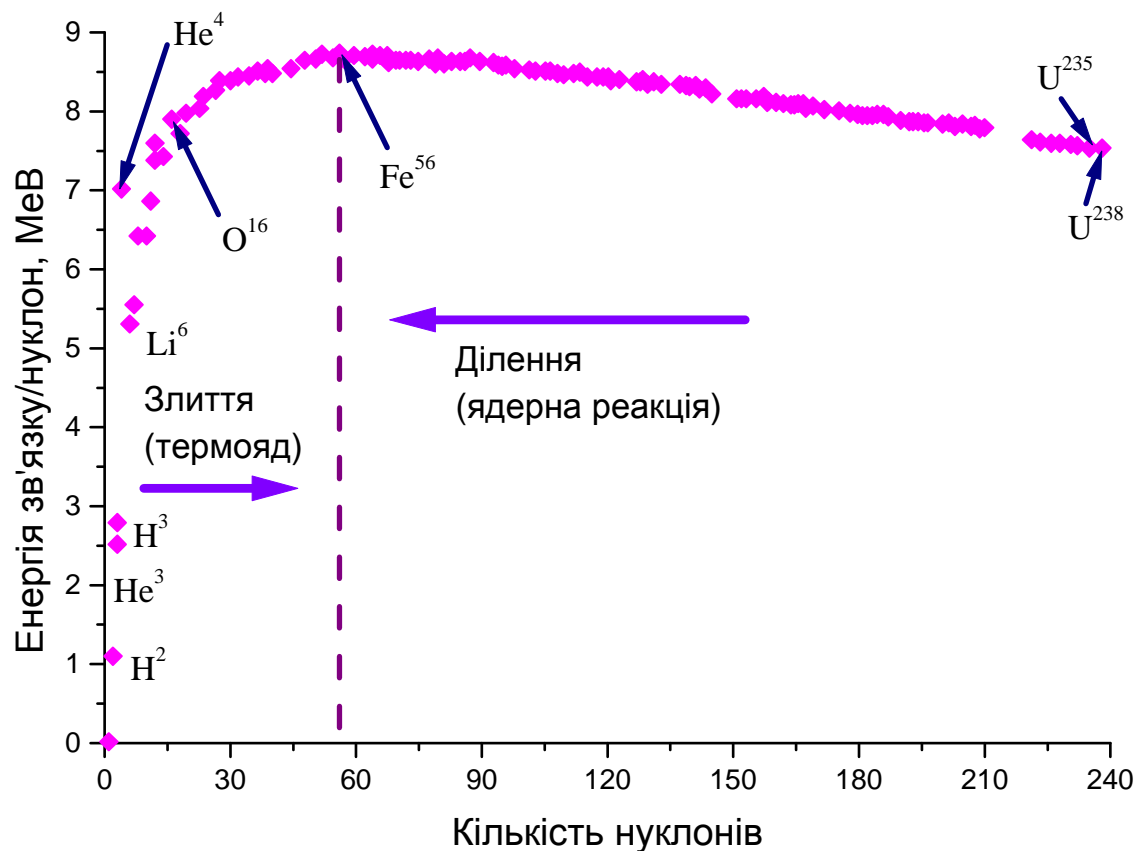


Рис. 6.3: Залежність середньої енергії зв'язку (на один нуклон) від кількості нуклонів в ядрі.

Енергія зв'язку: $E_{\text{bound}} = \Delta mc^2$, Δm – дефект маси.

Розпад нейтрона: $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}$

Розпад протона (в ядрі): $p \rightarrow n + e^+ + \nu$.

Закон радіоактивного розпаду $N = N_0 e^{-\lambda t}$, де λ – стала розпаду. Період напіврозпаду $T = \ln 2 / \lambda$.

Активність ядер (одиниця вимірювання Кюрі) $R = |dN/dt| = \lambda N$.

Радіоактивність Основна небезпека для здоров'я людини при опроміненні різними типами радіоактивності пов'язана із створенням в організмі іонів, які виникають під дією високоенергетичних квантів випромінювання. Іонізація атомів і молекул призводить, в свою чергу, до руйнування клітинок організму, змінює фізичні, хімічні і біохімічні процеси, які забезпечують життєдіяльність клітинок. В результаті опромінення можуть виникнути як соматичні захворювання (хворіє

Табл. 6.2: Зв'язок понять поля, дози, радіобіологічного ефекту та одиниць вимірювання.

Джерело	Поле	Опромінення	
		Неживих об'єктів	Живих об'єктів
Активність	Доза опромінення	Поглинена доза	Еквівалентна доза
Кюрі	Рентген (Р)	Грей (рад)	Зіверт(БЕР)

безпосередньо постраждалий від випромінювання), так і генні мутації, які призводять до захворювання нащадків постраждалих.

Для рентгенівського та γ -випромінювання одиницею дози опромінення приймають *рентген* (Р). Доза в 1 Р в 1 см³ сухого повітря при нормальних умовах (тиск 760 мм рт.ст.) створює іони в такій кількості, що сумарний заряд іонів кожного знака приблизно становить $3 \cdot 10^{-10}$ Кл. В системі СІ дозу опромінення вимірюють в Кл/кг, 1 Р = $2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг.

Для вимірювання дози опромінення інших (не рентгенівського і не γ -випромінювання) типів випромінювання використовують фізичний еквівалент рентгена: *ФЕР*. Доза опромінення в 1 ФЕР призводить до такої ж іонізації, як і 1 Р.

Для дози опромінення живих організмів використовують біологічний еквівалент рентгена – *БЕР*. Величина дози в БЕР пов'язана з дозою в рентгенах (або в ФЕРах) через коефіцієнт відносної біологічної ефективності – *ВБЕ*. Для γ і β -випромінювання ВБЕ=1, для теплових нейтронів ВБЕ=5, для α -випромінювання ВБЕ=10 ÷ 20.

Крім дози опромінення вводять ще *поглинену* дозу як кількість енергії випромінювання, яку поглинула одиниця маси опроміненої речовини. Одиниці вимірювання поглиненої дози – для неживих об'єктів грей (Гр) і рад, для живих Зіверт (Зв) і БЕР. Грей і Зіверт відповідають системі СІ, 1 Гр=1 Зв=1 Дж/кг, а рад і БЕР – системі СГС, 1 рад=100 ерг/г, 1 Гр=100 рад, 1 Зв=100 БЕР. Для визначення біологічного впливу користуються зв'язком 1 БЕР=1 рад·ВБЕ. Замість ВБЕ використовують також коефіцієнт відносної біологічної активності – *КВБА*. Класифікація одиниць вимірювання радіоактивності наведена в Табл.6.2

Рівень пошкоджень людського організму, створений радіацією, залежить від віку людини, рівня метаболізму, стану здоров'я на момент опромінення. Для оцінок визначають середню смертельну дозу (600 Р), а також летальну дозу, від якої протягом певного періоду, скажімо, 30 днів, вмирає певний відсоток, скажімо, 50% опромінених: ЛД50/30. Для людини ЛД50/30 становить 400-500 Р. Вплив поглинених доз наведено в Табл. 6.3.

Зауважимо, що незважаючи на встановлений негативний вплив великих доз радіації на людину, формування людського організму відбувалося в умовах слабого постійного опромінення і, наразі, невідомо, що буде, якщо усунути радіаційне

Табл. 6.3: Вплив різних поглинених доз на людський організм.

Доза (Гр)	Причина і результат
$(0,7 \div 2)10^{-3}$	Природні джерела, за рік
0,05	Гранично допустима, професійна, за рік
0,1	Рівень подвоєння генних мутацій
0,25	Однократно допустима при надзвичайних обставин
1,0	Гостре променеве захворювання
3 – 5	Без лікування вмирає 50% протягом 1-2-місяців, ураження кісткового мозку
10 – 50	Смерть через 1-2- тижні, ураження кишково-шлункового тракту
100	Смерть через кілька годин, ураження ЦНС

опромінення повністю. На Землі існують регіони, де населення постійно отримує досить високі дози, але при цьому тривалість життя висока і стан здоров'я людей в середньому відмінний.

Задачі

249. Оцінити густину ядра, знайти кількість нуклонів в одиниці об'єму ядра.
250. На початку 20 сторіччя вважалося, що вода з радіоактивним радоном-226 має властивості “живої”. В США продавали спеціальні пляшки “живої” води, кожна з яких містила 2 мкг радону. Враховуючи, що період напіврозпаду радону-226 $T = 3,8$ доби, знайти, скільки радіоактивного радону залишиться в пляшці через місяць (30 діб)?
251. Ядра A_1 із сталою розпаду λ_1 перетворюються на ядра A_2 із сталою розпаду λ_2 . Припустимо, в момент часу $t = 0$ препарат містив N_{10} ядер типу A_1 . Знайти закон накопичення ядер типу A_2 і момент часу t_m , коли кількість їх буде максимальною.
252. Знайти сталу розпаду і період напіврозпаду радіоактивного ^{55}Co , якщо його активність зменшується на 40% за 1 годину.

Відповіді

Відповіді наведені не до всіх задач.

53 36 дБ, 630 м.

54 5,5 с, 4,5 с.

55 1 Гц

56 34 с⁻¹.

57 5 кГц, 0,32 км.

58 $\alpha = 1$, $k = 10/(I_0 \ln 10)$.

145 $E = 0,76 \times 10^3$ В/см.

147 $I = I_0 \cos^2 \phi$.

Додатки

Екзаменаційні питання

I. Основи квантової фізики

1. Експериментальні факти, які вказали на неспроможність класичної механіки та електродинаміки описати “мікросвіт”: проблема теплового випромінювання, фотоефект, ефект Комптона. Інтерпретація цих явищ з точки зору квантової фізики.
2. Структура атомних спектрів. Модель атома за Бором – постулати Бора, межі їх застосування.
3. Гіпотеза де Бройля. Хвиля де Бройля. Досліди по дифракції мікрочасток. Статистична інтерпретація хвиль матерії.
4. Співвідношення невизначеності Гайзенберга. Поняття траєкторії в квантовій механіці. Корпускулярно-хвильовий дуалізм.
5. Співвідношення невизначеності енергія-час. Зміст, відміна від невизначеності імпульс-координата. *Межі застосування класичної електродинаміки. Ефект Казіміра. Ефект Лемба-Резерфорда.
6. Основні поняття квантової механіки та їх фізичний зміст: хвильова функція, оператор, повний набір фізичних величин, власні значення оператора (приклади). Визначення ймовірності, середніх значень величин (приклади). Співвідношення між операторами і фізичними величинами.
7. Основні постулати квантової механіки, принцип суперпозиції станів.
8. Оператори імпульсу, координати, моменту імпульсу, енергії. Комутатор, умова можливості одночасно виміряти різні фізичні величини. Закон збереження енергії в квантовій механіці.
9. Динамічний постулат квантової механіки: рівняння Шрьодінгера. Оператор енергії. Стаціонарні стани.
10. Застосування рівняння Шрьодінгера (ЗРШ): квантова частка у потенційному “ящику” (одновимірний та трьохвимірний випадок).
11. ЗРШ: гармонічний осцилятор. Формула для енергії стаціонарних станів гармонічного осцилятора.

12. Густина потоку ймовірностей. Проходження частки над та під потенційним бар'єром (тунельний ефект) та над потенційною ямою.
13. Квантування моменту імпульсу. Зв'язок між магнітним та орбітальним моментом. Магнітний момент електрона в атомі, ефект Зеемана. Досліди Штерна-Герлаха. Гіпотеза Гаудсмита і Уленбека, спин.
14. Ферміони і бозони. Принцип тотожності часток. Принцип Паулі.
15. Будова атомних енергетичних рівнів: квантування енергії, моменту імпульсу, проєкції моменту імпульсу, спіна. Атом водню. Стаціонарні стани, квантові числа, кратність виродження.
16. Періодична система Д. І. Менделєєва: принципи заповнення атомних оболонок, періодичний закон, зв'язок із хімічними властивостями елементів.

II. Фізика макросистем

1. Предмет термодинаміки та статистичної фізики. Поняття про макросистеми.
2. Основні вихідні положення термодинаміки, термодинамічна рівновага як найбільш загальний вид рівноваги, температура, внутрішні і зовнішні параметри, рівняння стану, квазістатичні процеси, зворотні та незворотні процеси.
3. Основні поняття термодинаміки (визначення): теплота, робота, внутрішня енергія, теплоємність, функція стану, функція процесу. Приклади процесів.
4. Початкові положення та основні поняття статистичної фізики: мікропараметри, макропараметри, середні, флуктуації, мікростани, макростани, статистична рівновага, функція розподілу.
5. Перший принцип термодинаміки.
6. Ентропія: термодинамічне визначення, статистичний зміст, ентропія як функція стану системи. Зв'язок між ентропією та теплотою.
7. Другий принцип термодинаміки. Теплові двигуни (цикл Карно). *Теорема Карно. Об'єднання 1-го та 2-го принципів термодинаміки.
8. Закон зростання ентропії (другий принцип термодинаміки).
9. Визначення температури із положення про термодинамічну рівновагу. Абсолютна шкала температур. Недосяжність абсолютного нуля. Поняття про ентропію у випадку інверсного заселення енергетичних рівнів і від'ємну "абсолютну" температуру.
10. Енергія як функція ентропії і об'єму системи. Вільна енергія, ентальпія, їх фізичний зміст.
11. Третій принцип термодинаміки (теорема Нернста).
12. Фазовий простір. Квантові обмеження на об'єм елементарної комірки в фазовому просторі. Ергодична гіпотеза, макропараметри як середні по фазовому об'єму.

13. Постулат Гіббса: ансамбль Гіббса, канонічний розподіл, інтерпретація розподілу Гіббса для класичних і квантових систем.
14. Розподіл Максвелла-Больцмана. Границі застосування. Приклади: найбільш ймовірна швидкість, середня квадратична швидкість, барометрична формула.
15. Застосування розподілу Максвелла: теорема про рівномірний розподіл середньої кінетичної енергії по степеням вільності. Теорія теплоємностей. Теплоємність кристалу.
16. Квантові статистики: число заповнення квантових станів, хімічний потенціал, розподіли Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна. Границі застосування, температура виродження.
17. Розподіл Бозе-Ейнштейна, застосування до газу фотонів. Закон Стефана-Больцмана. *Поняття про конденсацію Бозе-Ейнштейна, приклади.
18. Розподіл Фермі-Дірака. Електронний газ в металах. Енергія Фермі. Зв'язок із транспортними властивостями металів (електропровідність, теплопровідність).
19. Зонна теорія кристалів: кристалічна ґратка, формування та будова енергетичних зон, метали, напівпровідники, діелектрики.
20. Термодинаміка відкритих та нерівноважних систем: принцип Ле-Шательє-Брауна, принцип мінімуму виробництва ентропії (принцип Пригожина), лазер як відкрита система.
21. Принцип роботи лазера.

III. Елементарні частки та атомні ядра.

1. Класифікація елементарних часток: класи і характеристики. Лептони, адрони (баріони і мезони), частки та античастки. Кварки (властивості). Закони збереження баріонного та лептонного зарядів.
2. Типи фундаментальних взаємодій, властивості, радіус дії, переносники взаємодії.
3. Будова ядра, розміри, характерна енергія ядра в нуклоні, властивості ядерних сил, радіоактивне випромінювання.

Питання для самоперевірки

1. Описати суть явища фотоефекту.
2. Описати суть ефекту Комптона.
3. Що таке хвиля де Бройля? Як визначити її довжину?

4. Що таке фотон? Чим він характеризується? Як визначити його розмір?
5. Записати співвідношення невизначеностей Гайзенберга. Який його зміст?
6. Записати і пояснити енергетичне співвідношення невизначеностей.
7. Чи можна одночасно виміряти координату і імпульс електрона?
8. Чи має фізичний зміст хвильова функція?
9. Що таке оператор в квантовій механіці?
10. Як обчислити ймовірність знайти електрон в околі (об'ємом dV) даної точки простору?
11. Як визначити середнє значення імпульсу (енергії, моменту імпульсу, тощо) електрона в даному стані?
12. Записати оператор імпульсу, координати, енергії, моменту імпульсу.
13. Записати рівняння Шрьодінгера (стаціонарне і нестаціонарне).
14. Що таке стаціонарний стан?
15. Як визначити хвильову функцію та енергію частки в стаціонарному стані?
16. Записати рівняння Шрьодінгера для одновимірного гармонічного осцилятора.
17. Що таке тунельний ефект? Навести приклади.
18. Зв'язок магнітного моменту електрона та моменту імпульсу.
19. Що таке спин? Які експериментальні факти вказують на його існування?
20. Які принципи лежать в основі заповнення атомних оболонок?
21. Сформулювати принцип Паулі.
22. Сформулювати принцип тотожності часток.
23. Що таке ферміони і бозони?
24. Що таке термодинамічна рівновага?
25. Що таке: внутрішні та зовнішні параметри, мікропараметри та макропараметри, рівняння стану, квазістатичний процес, зворотний процес, незворотний процес?
26. Дати визначення таких понять: теплота, робота, внутрішня енергія?
27. Що таке теплоємність?

28. Що таке функція стану, функція процесу? Навести приклади.
29. Дати формулювання нульового принципу термодинаміки.
30. Записати рівняння стану ідеального газу.
31. Дати формулювання принципів термодинаміки.
32. Що таке термодинамічна ймовірність (статистична вага)?
33. Дати визначення ентропії з точки зору термодинаміки (рівність Клаузіуса).
34. Дати визначення ентропії з точки зору статистичної фізики.
35. Пояснити зміст поняття температури.
36. Як виміряти температуру в 1 градус?
37. Дати формулювання 2-го принципу термодинаміки через поняття ентропії.
38. Як змінюється ентропія в зворотних та незворотних процесах?
39. Що таке фазовий простір? Чим він відрізняється від конфігураційного?
40. Що таке функція розподілу в статистичній фізиці?
41. Пояснити зміст ергодичної гіпотези.
42. Дати формулювання постулату статистичної фізики – постулату Гіббса.
43. Записати розподіл Максвелла (по вектору швидкості, по модулю швидкості).
44. Записати розподіл Больцмана.
45. Записати розподіл Фермі-Дірака, Бозе-Ейнштейна. Для яких часток вони визначені?
46. Що таке температура виродження? Як її визначити? Якими розподілами слід користуватися при температурі вище і нижче температури виродження (для випадку ідеального газу)?
47. Що таке “енергетична зона” (в кристалі)?
48. Пояснити принцип заповнення енергетичних зон в кристалах.
49. Чим відрізняється метал від діелектрика та напівпровідника з точки зору зонної структури?
50. Перерахувати типи фундаментальних взаємодій та їх переносників.

51. Назвати класи елементарних часток.
52. Які властивості мають кварки?
53. Протон, нейтрон, електрон, нейтрино, фотон, гравітон – це лептон, адрон, мезон, баріон, переносник взаємодії, кварк?
54. З чого складається атомне ядро?
55. Що таке античастка? Як визначити її властивості, якщо відомі властивості частки?
56. Які ви знаєте заряди та закони їх збереження?

Лекційні вправи

Хвилі

1. Показати, що загальним розв'язком хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

є функція

$$\psi(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

2. Показати, що плоска і сферична хвилі задовільняють рівнянню Д'Аламбера.
3. Для ефекту Доплера отримати формулу:

$$\omega_{\text{rec}} = \omega_{\text{source}} \frac{v_{\text{wave}} - v_{\text{rec}}}{v_{\text{wave}} - v_{\text{source}}}.$$

Тут v_{wave} – швидкість хвилі, $v_{\text{rec}} \neq 0$ – швидкість приймача, $v_{\text{source}} \neq 0$ – швидкість джерела хвилі.

4. Показати, що плоска електромагнітна хвиля задовольняє рівнянню Д'Аламбера.
5. Отримати формулу для інтенсивності при битті:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Omega t + \alpha), \quad \Omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \alpha = \varphi_1 - \varphi_2.$$

6. Отримати формулу для інтенсивності при інтерференції:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

7. Отримати формулу для групової швидкості електромагнітних хвиль в середовищі з дисперсією $n(\omega)$:

$$u = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}.$$

8. Показати, що при додаванні *майже* монохроматичних хвиль $a_1 = A_1(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$, $a_2 = A_2(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$ інтерференційний доданок має вигляд $\langle I_{12}(t) \rangle = \langle A_1(t) A_2(t) \rangle \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.
9. Отримати спектр частот і довжин хвиль стоячих хвиль для стержня довжини L , який закріплено з одного кінця (другий кінець вільний). *Вказівка:* $a(0) = 0$, $da/dx|_{x=L} = 0$.
10. Для хвильових пакетів отримати співвідношення $\Delta\omega \cdot \Delta t = 2\pi$, $\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$.
11. Отримати формулу для оцінки абсолютної похибки d визначення місцезнаходження об'єкта за допомогою радіолокатора: $d \geq \sqrt{L\lambda}$, де L – відстань від радіолокатора до об'єкта, λ – довжина хвилі.
12. Оцінити максимальний радіус когерентності для сонячних променів.
13. Показати, що для джерела Ламберта зв'язок між світимістю M і яскравістю L задається формулою: $M = \pi L$.
14. В схемі інтерференції Юнга показати, що ширина інтерференційної смуги

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d},$$

де λ – довжина хвилі, L – відстань до екрану, d – відстань між щілинами.

Квантова фізика

15. Показати за допомогою законів збереження, що вільний електрон не може повністю поглинути фотон.
16. *Ефект Комптона.* Навести докладний вивід формули для ефекту Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} (1 - \cos \varphi).$$

17. Виходячи з постулатів теорії Бора вивести формули (в системі СГС): $r_n = n^2 a_B$, де $a_B = \hbar^2/(me^2)$, $E_n = -E_0/n^2$, де $E_0 = me^4/(2\hbar^2)$, і

$$\omega_{sn} = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{s^2} \right).$$

18. Виходячи з припущення, що частка є хвильовим пакетом з хвиль де Бройля, отримати формулу для фазової швидкості

$$V_{\Phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right)^2}} = V_{\Phi}(\omega),$$

тобто, хвильовий пакет розпливається.

19. Показати, що максимальне значення напруженості електричного поля в класичній фізиці $E_{\text{clas}}^{(\text{max})} = m^2 c^4 / e^3$, а в квантовій фізиці $E_{\text{quant}}^{(\text{max})} = 2m^2 c^4 / \hbar e$, тобто,

$$E_{\text{quant}}^{(\text{max})} = 2 \frac{e^2}{\hbar c} E_{\text{clas}}^{(\text{max})}.$$

Всі формули в системі СГС.

20. Показати, що $[\hat{M}_y, \hat{M}_z] = i\hbar \hat{M}_x$.
21. Показати, що густина струму ймовірності для вільної частки $\vec{j} = \rho \vec{v}$, де $\rho = |\psi|^2$.
22. Для хвильової функції вільної частки показати, що оператор координати та імпульсу не комутують.
23. Знайти середній квадрат імпульса частки, що рухається в нескінченно глибокій одновимірній потенціальній ямі. Частка знаходиться на рівні з $n = 1$.
24. Знайти власні значення енергії для частки в нескінченно глибокій потенціальній ямі ширини ℓ .
25. Отримати рівняння Шрьодінгера для одновимірного осцилятора в безрозмірних змінних:

$$\psi''(\xi) + (\lambda - \xi^2)\psi(\xi) = 0.$$

26. Знайти середню (повну) енергію осцилятора з трьома степенями вільності.
27. Показати, що хвиля де Бройля

$$\psi(\vec{r}, t) = A \exp \left[-\frac{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}{\hbar} \right]$$

задовольняє рівнянню Шрьодінгера.

28. Знайти власні функції оператора імпульсу.
29. *Тунельний ефект.* Показати, що коефіцієнт проходження через потенціальний бар'єр (в лекційних позначеннях):

$$D = \frac{|\vec{j}_3|}{|\vec{j}_1|} = |C_3|^2, \quad (\text{де } C_1 = 1).$$

30. Вивести коефіцієнт проходження частки через прямокутний бар'єр висоти U_0 та ширини l .

Фізика макросистем

31. Показати, що для ідеального газу при температурі T найбільш ймовірна швидкість дорівнює

$$v_{\text{max,prob}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

а середній модуль швидкості

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

32. Знайти об'єм фазового простору для вільної частки із модулем імпульсу в інтервалі $(p; p + dp)$.
33. Зобразити поверхню стану ідеального газу в координатах (PVT) .
34. Отримати рівняння Пуассона $PV^\gamma = \text{const}$ для ідеального газу.
35. Отримати барометричну формулу із розподілу Больцмана.
36. Вивести закон Стефана-Больцмана, виходячи із розподілу Бозе-Ейнштейна для газу фотонів.
37. Отримати вираз для енергії Фермі (при $T=0$), виходячи із розподілу Фермі-Дірака.
38. Показати, що частота Дебая дорівнює $\omega_D = (6\pi^2 n)^{1/3} \langle v \rangle$.
39. Показати, що теплова енергія решітки при низьких температурах

$$E_{\text{heat}} = B\hbar \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{B\hbar}{15} \left(\frac{\pi k}{\hbar} \right)^4 T^4,$$

де

$$B = \frac{12\pi V}{(2\pi \langle v \rangle)^2},$$

V – об'єм решітки.

40. Енергія кристалічної ґратки при $T \gg \Theta$ $E_p = C_V T + \text{const} = 3RT + \text{const}$. Знайти значення сталої в цьому виразі.

Бібліографія

- [1] И. Е. Иродов. Волновые процессы. Основные законы: Учеб. пособие для вузов/И. Е. Иродов. – 2-е изд. – М.:Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 264 с.: ил.
- [2] Иродов И.Е. Квантовая физика. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 320 с.
- [3] Иродов И.Е. Физика макросистем. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 320 с.
- [4] Ярив А. Введение в теорию и приложения квантовой механики. - М.: 1984.
- [5] Телеснин Р.М. Молекулярная физика. - М.: Высшая школа, 1973.
- [6] Иродов И.Е. Задачи по общей физике. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 432 с.